

Argomenti: convergenza in legge; legge dei grandi numeri e teorema limite centrale; approssimazione normale; intervalli di fiducia.

Esercizio 1. a) Siano $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. su $\mathbb{R}$, X una v.a. su $\mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Dimostrare che se $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ allora $aX_n + b \xrightarrow{\mathcal{L}} aX + b$.

b) Dimostrare la seguente versione del TLC: se $\{X_n\}_n$ è una successione di v.a. i.i.d. con media μ e varianza σ^2 allora

$$\bar{S}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim N(0, \sigma^2).$$

Esercizio 2. a) Sia X_n una v.a. con densità di probabilità f_n , $n = 1, 2, \dots$. Sia f una funzione continua a tratti tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

Dimostrare che f è una densità di probabilità e, detta X una v.a. con densità f , $X_n \rightarrow X$ in legge.

- b) Per $n = 1, 2, \dots$, sia X_n una v.a. con f.r. $F_n(x) = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}$ se $0 \leq x < 1$, $F_n(x) = 0$ se $x < 0$ e $F_n(x) = 1$ se $x \geq 1$.
- b1) Dimostrare che $X_n \rightarrow X$ in legge, con $X \sim \text{Un}(0, 1)$. Dedurre che X ha densità, che indichiamo con f .
- b2) Scrivere la densità f_n di X_n e provare che non vale la condizione del punto a), cioè la successione delle densità $\{f_n\}_n$ non converge alla densità f della v.a. limite nel senso scritto in a).

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che se g è una funzione continua a tratti ed integrabile su $\mathbb{R}$ tale che $\int_I g(x) dx \geq 0$ per ogni intervallo I in $\mathbb{R}$ allora $g(x) \geq 0$ per quasi ogni x , cioè le x per cui non vale la disuguaglianza determinano un insieme finito o numerabile.]

Esercizio 3. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. tali che $X_n \sim \text{Un}(0, \frac{1}{n})$.

- a) Studiare la convergenza in legge della successione $\{n^\gamma X_n\}_n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.
- b) Studiare la convergenza in legge di $\{(nX_n)^\beta\}_n$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Sia $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una successione di v.a. tali che $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/n = 1 - \mathbb{P}(X_n = n^\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato. Studiare la convergenza in legge di $\{X_n\}_n$.

Esercizio 5. Sia N il primo istante (aleatorio!) in cui si osserva l'uscita di testa in una serie di lanci ripetuti di una moneta. Sia $p \in (0, 1)$ la probabilità che esca testa. Studiare la convergenza in legge di $2pN$ quando $p = p_n \rightarrow 0$.

[Oss: poiché la legge di N dipende da p , se $p = p_n$ anche N dipende da n , quindi si chiede di studiare la convergenza in legge di $2p_n N_n$.]

Esercizio 6. Per $n \geq 1$, sia X_n una v.a. tale che $\mathbb{P}(X_n = n) = \alpha_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$, dove $\{\alpha_n\}_n \subset [0, 1]$.

- a) Scrivere la f.c. di X_n .
- b) Dimostrare che $\{X_n\}_n$ converge in legge se e solo $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Esercizio 7. Siano X e Y v.a. indipendenti di legge $\text{Exp}(1)$ e siano (X_k, Y_k) , $k \geq 1$ copie indipendenti di (X, Y) .

- a) Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\sum_{k=1}^n (X_k + Y_k) + \sqrt{2n} - 2n| > \sqrt{2n})$.
- b) Posto $W_n = \min_{1 \leq k \leq n} (X_k + Y_k)$ e $T_n = \max_{1 \leq k \leq n} (X_k + Y_k)$, studiare la convergenza in legge delle successioni $\{W_n\}_{n \geq 1}$ e $\{T_n\}_{n \geq 1}$. $\{W_n\}_{n \geq 1}$ e/o $\{T_n\}_{n \geq 1}$ convergono in probabilità?

Esercizio 8. Per $n \geq 1$, sia $X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$, $\lambda > 0$.

- a) Usando la legge dei grandi numeri, dimostrare che $\frac{\lambda X_n}{n} \xrightarrow{P} 1$.
- b) Usando il teorema limite centrale, dimostrare che $\frac{\lambda X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim N(0, 1)$.

Esercizio 9. In una popolazione femminile (adulta) è noto che la statura media è 164 cm e che nell'88.5% dei casi la statura è inferiore a 170 cm. Si suppone che la variabile "statura" sia normalmente distribuita.

- a) Calcolare la deviazione standard.
- b) Consideriamo un campione di 25 donne, prese a caso nella popolazione femminile. Calcolare la probabilità che la media aritmetica delle stature osservate nel campione sia maggiore di 166 cm.

Esercizio 10. Siano X, Y v.a. indipendenti con $X \sim \text{Un}(0, 2)$ e $Y \sim \text{Un}(-1, 0)$. Sia $\{Z_k\}_k$ una successione di copie indipendenti di $Z = X - Y$ e $\{S_n\}_n$ la successione delle somme parziali: $S_n = \sum_{k=1}^n Z_k$. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(|2S_n - 3n| < \sqrt{\frac{5n}{3}}\right) = 2\Phi(1) - 1.$$

Esercizio 11. Sia X una v.a. con densità di probabilità

$$p(x) = \frac{3}{x^4} \mathbb{1}_{x>1}.$$

- a) Dire per quali valori di β esiste $\mathbb{E}[X^\beta]$ e, se possibile, calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\text{Var}(X)$.

Sia $\{X_n\}_n$ una successione di copie indipendenti di X e $\{S_n\}_n$ la successione delle somme parziali: $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- b) Usando la disuguaglianza di Chebycev, stimare n affinché $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \frac{3}{2}\right| > 0.1\right) \leq 10^{-3}$.
- c) Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{2S_n - 3n}{\sqrt{n}} > 0\right)$.

Esercizio 12. Un dado (non truccato) viene tirato 300 volte. Sia X la somma dei punteggi. Calcolare approssimativamente le probabilità seguenti:

- a) $\mathbb{P}(X > 1000)$;
- b) $\mathbb{P}(1000 < X \leq 1100)$.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ e $\sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.]

Esercizio 13. a) Una moneta equa viene tirata 1000 volte. Qual è la probabilità di ottenere un numero di teste compreso tra 490 e 520?

b) Una moneta equa viene tirata 1000 volte. Determinare k affinché la probabilità di ottenere un numero di teste compreso tra 490 e k sia circa 0.7.

c) Una moneta equa viene tirata più di 800 volte. Quante volte dev'essere tirata perché con probabilità maggiore di 0.6 escano più di 400 teste?

d) Trovare condizioni sulla probabilità p che in un lancio singolo esca testa affinché si abbia: $\mathbb{P}(S_{1000} \leq 201) > 0.5$

Esercizio 14. La quantità di neve, che cade al giorno, in un certo periodo dell'anno, su un tratto di autostrada, si può modellizzare come una variabile aleatoria continua, di media 1.5 pollici e deviazione standard 0.3 pollici.

a) Qual è la probabilità (approssimata) che in 50 giorni cadano meno di 70 pollici di neve?

b) Qual è la probabilità (approssimata) che in 50 giorni cadano tra i 70 e i 90 pollici di neve?

Esercizio 15. Un dado dà probabilità $p \in (0, 1)$ all'uscita di 1, gli altri risultati (2, 3, 4, 5, 6) risultano invece equiprobabili. Sia X il risultato di un lancio di questo dado.

a) Scrivere la legge di X .

b) Calcolare $\mu = \mathbb{E}(X)$ e $\sigma^2 = \text{Var}(X)$. Trovare inoltre una stima dall'alto per $\sup_{p \in (0,1)} \sigma^2$.

Il dado viene poi lanciato n volte e, ad ogni lancio, viene registrato il risultato ottenuto.

c) Scrivere un intervallo di fiducia di livello 95% per μ e, di conseguenza, per p .

d) Vengono effettuati 1000 lanci, ottenendo una media dei risultati pari a 2.7. Cosa si può dire di p ?

e) Stimare il numero di lanci n che occorre effettuare affinché l'intervallo di fiducia per p abbia ampiezza al più 10^{-2} .

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ e $\sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.]

Esercizio 16. Si vuole studiare una certa caratteristica, che chiameremo $\mathcal{C}$, presente in una popolazione. Tale popolazione è costituita da 2 gruppi, che indicheremo con A e B . Si sa che $\mathcal{C}$ è presente nel gruppo A in proporzione γ e nel gruppo B in proporzione $1 - \gamma$, dove $\gamma \in [0, 1]$ non è noto. Per studiare γ , un gruppo, tra A e B , viene scelto in base ad un esperimento che con probabilità $2/3$ porta alla scelta di A e con probabilità $1/3$ alla scelta di B . Una volta determinato il gruppo, si prende a caso un individuo e si osserva la presenza o meno della caratteristica $\mathcal{C}$.

a) Scrivere uno stimatore non distorto e consistente per γ .

b) Determinare un intervallo di fiducia per γ al 95% e determinare il numero n di osservazioni affinché l'ampiezza di tale intervallo sia dell'ordine di 10^{-3} .