

Argomenti: funzioni caratteristiche; leggi gaussiane multivariate.

Esercizio 1. Presa $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, siano $\bar{\varphi}$ la funzione coniugata e $|\varphi|^2$ la funzione modulo (complesso) al quadrato.

Dimostrare che se $\varphi(t)$ è una funzione caratteristica allora anche $\bar{\varphi}(t)$, $\varphi^2(t)$ e $|\varphi|^2(t)$ sono funzioni caratteristiche. Equivalentemente: se $\varphi(t)$ denota la funzione caratteristica di una v.a. X , cioè $\varphi_X(t) = \varphi(t)$, esibire tre v.a. Y, Z e W con funzione caratteristica data da $\varphi_Y(t) = \bar{\varphi}(t)$, $\varphi_Z(t) = \varphi^2(t)$ e $\varphi_W(t) = |\varphi|^2(t)$ rispettivamente.

Esercizio 2. Sia $\varphi(t)$ la funzione caratteristica di una v.a. X su $\mathbb{R}$ dotata di momento secondo. Dimostrare che si ha sempre $\varphi'(0)^2 \geq \varphi''(0)$.

[Sugg.: ricordare il legame tra funzioni caratteristiche e momenti...]

Esercizio 3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio su $\mathbb{R}^2$ con densità continua

$$f_{X,Y}(x, y) = ce^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y > x > 0}.$$

- a) Calcolare c e, se esiste, $\mathbb{E}(XY)$.
- b) Calcolare la funzione caratteristica $\varphi_{X,Y}$ di (X, Y) .
- c) Usando la funzione caratteristica $\varphi_{X,Y}$, calcolare $\text{Cov}(X, Y)$.
[Sugg.: ricordare il legame tra funzioni caratteristiche e momenti...]
- d) Calcolare la funzione caratteristica $\varphi_{U,V}$ di $U = X$ e $V = Y - X$. U e V sono indipendenti?
[Si ricorda che, per Z v.a. in $\mathbb{R}^d$, A matrice $n \times d$ e $b \in \mathbb{R}^n$, si ha $\varphi_{AZ+b}(\theta) = e^{i\langle \theta, b \rangle} \varphi_Z(A^T \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^n$.]
- e) Calcolare la densità congiunta di $U = X$ e $V = Y - X$ usando dapprima il punto d) e poi usando il TCV.

Esercizio 4. Sia $X = (X_1, \dots, X_d)$ una v.a. su $\mathbb{R}^d$ di legge $N(\mu, C)$, con $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \text{Mat}(d \times d)$ simmetrica e semidefinita positiva. Dunque,

$$\varphi_X(\theta) = e^{i\langle \theta, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle C\theta, \theta \rangle}, \quad \theta \in \mathbb{R}^d.$$

- a) Dimostrare che ciascuna componente X_k del vettore X ha legge gaussiana su $\mathbb{R}$, di media e varianza da precisare.
- b) Dimostrare che se C è una matrice diagonale allora le coordinate $X_1, \dots, X_d$ sono v.a. indipendenti. Viceversa, dimostrare che se $X_1, \dots, X_d$ sono v.a. gaussiane e indipendenti a valori in $\mathbb{R}$ allora $X = (X_1, \dots, X_d)$ è una gaussiana multivariata con matrice di covarianza diagonale.
- c) Dimostrare il seguente risultato più generale.

Supponiamo che C sia una matrice a blocchi del tipo (la notazione $*$ denota la trasposizione)

$$C = \begin{pmatrix} \bar{C} & O \\ O^* & \hat{C} \end{pmatrix}$$

con $\bar{C} \in \text{Mat}(k \times k)$, $\hat{C} \in \text{Mat}((d-k) \times (d-k))$, $O \in \text{Mat}(k \times (d-k))$, dove $1 \leq k < d$ e O è una matrice nulla. Provare che i sottovettori aleatori $\bar{X} = (X_1, \dots, X_k)$ e $\hat{X} = (X_{k+1}, \dots, X_d)$ sono indipendenti e gaussiani rispettivamente su $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{d-k}$.

[Sugg.: basta far vedere che la f.c. della coppia $(\bar{X}, \hat{X})$ si fattorizza nel prodotto delle f.c.: $\varphi_{\bar{X}, \hat{X}}(\bar{\theta}, \hat{\theta}) = \varphi_{\bar{X}}(\bar{\theta})\varphi_{\hat{X}}(\hat{\theta})$, per ogni $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^k$ e $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{d-k}$.]

Esercizio 5. In questo esercizio ci proponiamo di dimostrare un risultato di algebra lineare.

Sia $\odot : \text{Mat}(n \times n) \times \text{Mat}(n \times n) \rightarrow \text{Mat}(n \times n)$ il prodotto tra matrici definito da

$$(A \odot B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad A, B \in \text{Mat}(n \times n).$$

Proposizione 1. Se $A, B \in \text{Mat}(n \times n)$ sono simmetriche e semidefinite positive allora $A \odot B$ è simmetrica e semidefinita positiva.

Useremo una tecnica probabilistica. Per tale motivo, siano $\bar{C}, \hat{C} \in \text{Mat}(n \times n)$ matrici simmetriche e semidefinite positive e sia $C \in \text{Mat}(2n \times 2n)$ definita da

$$C = \begin{pmatrix} \bar{C} & O \\ O & \hat{C} \end{pmatrix}$$

dove $O \in \text{Mat}(n \times n)$ denota la matrice nulla.

a) Dimostrare che C è simmetrica e semidefinita positiva.

Sia X una v.a. su $\mathbb{R}^{2n}$ tale che $X \sim N(0, C)$. Definiamo $\bar{X}$ il vettore delle prime n componenti di X e $\hat{X}$ il vettore delle rimanenti componenti, cioè

$$\bar{X}_i = X_i \quad \text{e} \quad \hat{X}_i = X_{n+i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definiamo ora $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ la v.a. a valori in $\mathbb{R}^n$ data da

$$Y_i = \bar{X}_i \hat{X}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

b) Dimostrare che per ogni $i, j = 1, \dots, n$ si ha

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \bar{C}_{ij} \hat{C}_{ij}.$$

Sulla base dei punti a) e b), dimostrare la Proposizione 1.

Esercizio 6. Siano X e Z due v.a. reali indipendenti tali che $X \sim N(0, 1)$ e $\mathbb{P}(Z = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(Z = -1)$. Definiamo $Y = ZX$.

a) Scrivere la funzione caratteristica di Y e dedurre che $Y \sim N(0, 1)$.

b) Scrivere la funzione caratteristica di (X, Y) e dedurre che X e Y non sono indipendenti.

c) Verificare che $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

d) È possibile che la coppia (X, Y) abbia legge gaussiana su $\mathbb{R}^2$?

[Sugg: dovendo calcolare $\mathbb{E}(f(X, Z))$, con f opportuna, si potrebbe usare la seguente relazione: $f(X, Z) = f(X, Z)\mathbb{1}_{Z=1} + f(X, Z)\mathbb{1}_{Z=-1} = f(X, 1)\mathbb{1}_{Z=1} + f(X, -1)\mathbb{1}_{Z=-1}$ ed essendo $X \perp\!\!\!\perp Z$, si ha $\mathbb{E}(f(X, Z)) = \mathbb{E}(f(X, 1)\mathbb{1}_{Z=1}) + \mathbb{E}(f(X, -1)\mathbb{1}_{Z=-1}) = \mathbb{E}(f(X, 1))\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{E}(f(X, -1))\mathbb{P}(Z = -1)$.]

Esercizio 7. Sia $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ una v.a. su $\mathbb{R}^d$ di legge $N(\mu, C)$, con $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \text{Mat}(d \times d)$ simmetrica e semidefinita positiva.

a) Per $m \in \mathbb{R}^k$ e $A \in \text{Mat}(k \times d)$, sia $W = m + AZ$. Dimostrare che W è ancora gaussiana e precisare i parametri che caratterizzano la legge. Dedurre poi che per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, la v.a. $\lambda_1 Z_1 + \dots + \lambda_d Z_d$ è gaussiana, di parametri da determinare.

b) Siano X e Y due v.a. su $\mathbb{R}$ congiuntamente gaussiane, centrate e tali che $\mathbb{E}(X^2) = 4$, $\mathbb{E}(Y^2) = 1$ e $2X + Y \perp\!\!\!\perp X - 3Y$.

b1) Scrivere la matrice di covarianza di (X, Y) .

b2) Calcolare la legge di $(X + Y, 2X - Y)$.

Esercizio 8. Sia $X = 2U - V$, dove (U, V) è un vettore gaussiano, con $\mathbb{E}(U) = 6$, $\mathbb{E}(V) = 2$ e matrice di covarianza

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(4 \leq X < 16)$.

b) Determinare c tale che $\mathbb{P}(|X - 10| > c) = 0.1$.