Tutorato VI
Probabilità e Statistica
a.a. 2023/2024

Argomenti: uso del TCV per il calcolo di densità; media, varianza, covarianza e matrice di covarianza di v.a. assolutamente continue; legge gaussiana su $\mathbb{R}$; legge chi-quadro.

Esercizio 1. Sia (X, Y) una v.a. in $\mathbb{R}^2$ con densità continua

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{x^3y^2}\,\mathbb{1}_{x>1,y>x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(Y < 2X)$.

b) Calcolare la densità congiunta di $U = \log X$ e $V = X/Y$ e le relative densità marginali.

c) Calcolare, se esiste, $\mathbb{E}(U^n)$, dove $n \geq 1$ è un intero fissato.

Esercizio 2. Si chiama legge di Laplace di parametro $\lambda > 0$ quella individuata dalla densità

$$p(x) = c\,\mathrm{e}^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Calcolare c. Dire se X ha momento di ordine k, con $k \geq 1$. E qualora esistano, calcolare media e varianza di X.

b) Calcolare la densità di $Z = \alpha X$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si tratta di una legge nota?

c) Calcolare la legge di $W = |X|$. Si tratta di una legge nota? Esistono media e varianza? Se sì, quanto valgono?

Esercizio 3. Fissato $\mu \in \mathbb{R}$, sia

$$p(x) = c\,x^{\mu}\mathbb{1}_{x\in(0,1)}. \tag{1}$$

a) Determinare μ e c affinché p sia una densità di probabilità su $\mathbb{R}$.

Nel seguito, indicheremo con X una v.a. con densità (1), con μ e c appena determinate.

b) Dire per quali valori di μ esiste la media di X e calcolarla.

c) Siano X e Y due v.a. indipendenti, X con densità data da (1) con $\mu = 1$ (verificare che $\mu = 1$ dà effettivamente una densità!) e $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$. Calcolare la densità della v.a. $X + Y$.

Esercizio 4. Una v.a. X su $\mathbb{R}$ è detta "di Cauchy" se ha densità

$$p(x) = \frac{c}{1 + x^2}$$

a) Mostrare che $c = 1/\pi$ e scrivere esplicitamente la funzione di distribuzione associata.

b) Dire se X ha valor medio. X ha varianza?

c) Calcolare la legge di $Y = X^2$. Y ha media? Ha varianza?

d) Dopo aver verificato che la v.a. $Z = 1/X$ è ben posta, calcolare la legge di Z. Z ha media? Ha varianza?

Esercizio 5. Siano X e Y v.a. indipendenti tali che $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Exp}(\mu)$. Calcolare la densità e la f.r. di:

a) $Z = X + Y$;

b) $W = \alpha X$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si tratta di leggi note?

Esercizio 6. Sia X una v.a. con densità $\Gamma(\alpha, \lambda)$, ovvero

$$p_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} 1\!\!1_{(0,+\infty)}(x), \quad \alpha, \lambda > 0.$$

a) Esistono i momenti di $Y = 1/X$? Se sì, fino a quale ordine?

b) Calcolare, se possibile, la media di Y.

c) Calcolare, se possibile, $\text{Cov}(X, Y)$. Che tipo di dipendenza c'è tra X e Y?

Esercizio 7. Siano X ed Y due v.a. indipendenti $X \sim \text{Un}(0, 1)$ e $Y \sim \text{Exp}(1)$.

a) Posto $U = X$ e $V = X - Y$, calcolare la densità congiunta di (U, V).

b) Usando **a)**, calcolare la densità di $X - Y$.

c) Usando **b)**, calcolare $\mathbb{P}(X > Y)$.

Esercizio 8. Sia (X, Y) un vettore aleatorio in $\mathbb{R}^2$ con densità di probabilità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{xy^2}\, 1\!\!1_{y>x>1}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Calcolare le leggi marginali. X ha media? E Y?

b) Posto $U = \ln X$ e $V = \ln Y - \ln X$, verificare che U e V sono ben poste, determinare la densità congiunta di (U, V) e di conseguenza $\text{Cov}(U, V)$.

Esercizio 9. Siano X e Y due v.a. con densità congiunta

$$p(x, y) = c\, \sqrt{x^2 + y^2}\, 1\!\!1_{x^2+y^2 \le 1}$$

a) Calcolare c e la matrice di covarianza di (X, Y).

b) Calcolare la densità congiunta di $U = X$ e $V = Y/X$. U e V sono indipendenti?

c) Sia R la distanza di (X, Y) dall'origine. Calcolare, se esistono, $\mathbb{E}(R)$ e $\text{Var}(R)$.

d) Per $n \geq 1$, sia R_n la distanza di (X_n, Y_n) dall'origine, con (X_n, Y_n) copie indipendenti di (X, Y). Posto $D_n = \min(R_1, \ldots, R_n)$, $n \geq 1$, dimostrare che per ogni $\delta > 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n > \delta) = 0$.

Esercizio 10. [Distribuzione chi-quadro]

a) Sia $X \sim \mathrm{N}(0,1)$. Dimostrare che $X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dedurre la seguente proprietà della funzione Gamma:

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}.$$

b) Per $n \geq 1$, siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d. di legge $\mathrm{N}(0,1)$. Dimostrare che $X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

La legge $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ è detta *legge chi-quadro (o chi-quadrato) con n gradi di libertà*[1] ed è indicata con $\chi^2(n)$. Dunque, in **b)** si dimostra che date n v.a. indipendenti gaussiane standard $X_1, \dots, X_n$, allora $X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$.

Esercizio 11. Sia $X \sim \mathrm{N}(10, 36)$. Facendo uso delle tavole, calcolare:

a) $\mathbb{P}(X > 4)$;

b) $\mathbb{P}(4 < X \leq 16)$;

c) $\mathbb{P}(X \leq 22)$;

d) il valore di c per cui $\mathbb{P}(X > c) = 0.10$;

e) il valore di c per cui $\mathbb{P}(|X - 10| > c) = 0.10$.

[1] La distribuzione $\chi^2(n)$ riveste un ruolo particolarmente importante in statistica, dov'è usata per la verifica di test d'ipotesi sulla varianza (rozzamente, si tratta di test statistici per la validazione di un'ipotesi fatta sulla varianza, quando questa non è nota).