Tutorato III
Probabilità e Statistica
a.a. 2023/2024

Argomenti: leggi congiunte e marginali; leggi condizionali; v.a. indipendenti; calcolo di leggi di funzioni di v.a.; speranza matematica; speranza matematica condizionale.

Esercizio 1. Due giocatori (Tizio e Caio) ed il banco (Sempronio) lanciano un dado ciascuno. Un giocatore vince se ottiene un risultato non inferiore a quello dell'altro giocatore e superiore al risultato del banco, altrimenti vince il banco.

a) Posto X = risultato di Tizio, Y = risultato di Caio, Z = risultato di Sempronio, scrivere la densità congiunta $p_{X,Y,Z}(x,y,z)$ di X, Y e Z. Calcolare di conseguenza le relative marginali a due a due ($p_{X,Y}$, $p_{X,Z}$ e $p_{Y,Z}$) e le marginali singole (p_X, p_Y e p_Z).

b) Scrivere, in termini della densità congiunta $p_{X,Y,Z}(x,y,z)$, la probabilità che vinca un giocatore (Tizio, oppure Caio). Calcolare poi esplicitamente tale probabilità.

c) Dire se gli eventi {vince Tizio} e {vince Caio} sono indipendenti.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.]

Esercizio 2. Un'urna, che indicheremo con U, contiene 2 palline bianche e 1 pallina rossa. Da U vengono effettuate n estrazioni con reinserimento. Sia N il numero totale di palline bianche estratte. Una seconda urna, urna V, viene riempita con N palline bianche e $n-N$ palline rosse.

(a) Calcolare la distribuzione di N.

(b) Dall'urna V viene estratta una pallina: calcolare la probabilità che sia bianca (si interpreti il risultato!).

(c) Calcolare per quali valori di n la probabilità di aver estratto dall'urna U una sola pallina bianca, noto il risultato di cui al punto precedente, sia più grande di 1/2.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = np$.]

Esercizio 3. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x \text{ e } x,y = 0,1,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Verificare che effettivamente p_{XY} è una densità discreta su $\mathbb{R}^2$.

b) Si ha: $\mathbb{P}(Y < X) = 0$. Giustificare questa affermazione senza fare conti (niente foglio e penna!), guardando solo alla densità congiunta.

c) Scrivere le distribuzioni marginali. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note? X e Y sono indipendenti?

d) Scrivere le distribuzioni condizionali di X dato $Y = y$ e di Y dato $X = x$, per y e x in un insieme da specificare. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note?

Esercizio 4. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \dots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(|Y| = X)$.

b) Scrivere le distribuzioni marginali. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note?

Esercizio 5. Siano X e Y due v.a. discrete, a valori in $E_X = \{-1, 0, +1\}$ e $E_Y = \{-1, +1\}$ rispettivamente, con densità discreta congiunta p_{XY} descritta dalla seguente tabella:

	$X = -1$	$X = 0$	$X = +1$	
$Y = -1$	$1/4$	$1/8$	α	
$Y = +1$	$1/8$	$1/8$	$1/4$	

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare α e scrivere le densità discrete marginali p_X e p_Y.

(b) Scrivere le densità marginali e dire se X e Y sono indipendenti.

Esercizio 6. Siano X e Y v.a. con densità discreta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} c \cdot (1-p)^{|x|-1} p & \text{se } x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ e } y = \operatorname{sgn}(x) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ e la funzione sgn, detta "funzione segno", è definita da: $\operatorname{sgn}(\xi) = +1$ se $\xi > 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$ e $\operatorname{sgn}(\xi) = -1$ se $\xi < 0$.

a) Si ha: $\mathbb{P}(Y = \sqrt{2}) = 0$, $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ e $\mathbb{P}(X > 0 \mid Y = -1) = 0$. Giustificare queste affermazioni senza fare conti (niente foglio e penna!), guardando solo alla densità congiunta.

b) Mostrare che dev'essere $c = 1/2$.

c) Scrivere le densità marginali di X e di Y. Le v.a. X e Y sono indipendenti?

d) Scrivere le densità condizionali di X dato $Y = y$ e di Y dato $X = x$. Verificare formalmente che $\mathbb{P}(X > 0 \mid Y = -1) = 0$.

Esercizio 7. Siano X e Y due v.a. discrete a valori in E_X e E_Y rispettivamente, con densità congiunta discreta p_{XY} data da: $p_{XY}(x,y) = g_1(x)g_2(y)$, $x \in E_X$ e $y \in E_Y$, dove $g_1, g_2 \geq 0$. Siano p_X e p_Y le rispettive densità marginali. Dimostrare che

a) posto $c_1 = \sum_{x \in E_X} g_1(x)$ e $c_2 = \sum_{y \in E_Y} g_2(y)$, si ha $0 < c_1, c_2 < +\infty$;

b) $c_1 \cdot c_2 = 1$;

c) $p_X(x) = c_1^{-1}\, g_1(x)$ e $p_Y(y) = c_2^{-1}\, g_2(y)$.

Dedurre il seguente risultato:

d) *Due v.a. discrete X e Y sono indipendenti se e solo se esistono due funzioni g_1 e g_2 tali che la densità congiunta di X e Y si può scrivere $p_{XY}(x,y) = g_1(x)g_2(y)$.*

Esercizio 8. Siano X e Y v.a. indipendenti t.c.

$$X = \begin{cases} -1 & \text{con probabilità } \frac{1}{4} \\ 0 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{con probabilità } \frac{1}{8} \\ 2 & \text{con probabilità } \frac{1}{8} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{con probabilità } \frac{1}{3} \\ 0 & \text{con probabilità } \frac{2}{3} \end{cases}$$

a) Disegnare la funzione di ripartizione di X e di Y.

b) Posto $Z = X^2$, dire quali valori può assumere Z. Calcolare la densità discreta di Z e disegnare la relativa funzione di ripartizione.

c) Posto $W = Z + Y$, dire quali valori può assumere W. Calcolare la densità discreta di W e disegnare la relativa funzione di ripartizione.

Esercizio 9. In una sequenza di prove bernoulliane $X_1, X_2, \dots$ con $p =$ probabilità di successo, siano T e U rispettivamente il primo e il secondo istante in cui si osserva il successo:

$$T = \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = 1\} \qquad U = \inf\{n \geq T+1 \,:\, X_n = 1\}$$

a) Calcolare la distribuzione congiunta di T e U e le relative distribuzioni marginali.

b) Posto $V = U - T$, calcolare la distribuzione congiunta di T e V e dire se sono indipendenti.

d) Fissato $k \geq 1$, calcolare $\mathbb{P}(U > T + k)$ e dire per quali valori di k tale probabilità è minore di 0.1.

Esercizio 10. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x, \text{ con } x, y = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare la distribuzione condizionale di Y dato che $X = x$, per x appartenente ad un insieme opportuno che si chiede di specificare.

b) Calcolare la distribuzione congiunta di $Z = X + 1$ e $W = Y - X$. Z e W sono indipendenti?

Esercizio 11. Sia (X,Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \dots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Verificare che la v.a. $W = Y/X$ è ben posta e calcolarne la legge.

b) Calcolare la legge di $X + Y$.

Esercizio 12. Siano X, Y, Z tre v.a. indipendenti, con legge geometrica di parametro $p \in (0,1)$. Calcolare $\mathbb{P}(X = Y)$ e $\mathbb{P}(X \geq 2Y)$.

Esercizio 13. Siano p, q densità discrete di v.a. a valori in $E \subset \{0, 1, \ldots\}$. Si dice che q è *assolutamente continua* rispetto a p, in simboli: $q \ll p$, se per ogni $k \in E$ tale che $p(k) = 0$ allora si ha anche $q(k) = 0$. E si chiama *entropia* di una densità q rispetto a una densità p la quantità

$$H(q;p) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k\in E} \log \frac{q(k)}{p(k)}\, q(k) & \text{se } q \ll p \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notare che, in generale, $H(p;q) \neq H(q;p)$ ed inoltre che si ha sempre $H(p;p) = 0$.

a) Calcolare $H(p_\lambda; p_{\lambda_0})$ quando p_λ è la densità di Poisson di parametro λ. Mostrare che $\lambda \mapsto H(p_\lambda; p_{\lambda_0})$ si annulla per $\lambda = \lambda_0$ insieme alla sua derivata prima, mentre la derivata seconda è positiva. Dedurre che $H(p_\lambda; p_{\lambda_0}) \geq 0$ e $H(p_\lambda; p_{\lambda_0}) = 0$ solo se $\lambda = \lambda_0$.

b) Per $p, p_0 \in (0, 1)$, calcolare $H(\mu_p; \mu_{p_0})$, dove μ_p è la densità $\mathrm{Bi}(n, p)$. Provare che $H(\mu_p; \mu_{p_0}) \geq 0$ e $H(\mu_p; \mu_{p_0}) = 0$ solo se $p = p_0$.

Esercizio 14. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x, \text{ con } x, y = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Dire se X e/o Y hanno media ed in caso affermativo, calcolarne le medie. E se esiste, calcolare $\mathbb{E}(X - Y)$.

b) Calcolare la media condizionale di Y dato che $X = x$, per x appartenente ad un insieme opportuno che si chiede di specificare.

Esercizio 15. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\, e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \ldots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per $x = -1, 1$, dire se esiste e in caso affermativo calcolare la media condizionata di Y dato $X = x$.

Esercizio 16. Siano X, Y, Z tre v.a. indipendenti, con legge geometrica di parametro $p \in (0, 1)$. Calcolare la media condizionata di X dato $X + Y$ e di Z dato $X + Y$.

Esercizio 17. In uno schema di Bernoulli, con $p =$probabilità di ottenere 1, calcolare il numero medio di esperimenti che occorre effettuare perché per la prima volta si osservi la sequenza 01.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che, per $\alpha \in (-1, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$.]

Esercizio 18. Una compagnia di assicurazioni ha un numero N (molto grande) di assicurati contro un dato rischio che ha una probabilità p (molto piccola) di colpire ogni singolo assicurato nel corso di un anno (si supponga che il numero N di assicurati e la probabilità p del rischio rimangano costanti nel corso degli anni). Siano X_1 e X_2 il numero di assicurati che la compagnia sarà chiamata ad indennizzare rispettivamente nel primo e nel secondo anno e sia $Z = X_1 + X_2$ il numero totale di indennizzi nei primi due anni. Per la particolare natura del rischio in questione, si può supporre che eventi che si riferiscono ad assicurati diversi siano indipendenti. Si supponga che anche X_1 e X_2 siano indipendenti.

1. Quale legge è ragionevole assumere per le v.a. X_1 e X_2? [Sugg.: si ricordi il comportamento asintotico della distribuzione binomiale...]

2. Sulla base del modello imposto in 1., qual è la distribuzione di Z?

3. La compagnia versa ad ogni assicurato, in caso d'incidente, un indennizzo pari ad I e riceve da ogni assicurato un premio pari a $\frac{5}{4}pI$. Definiamo il "beneficio annuale" della compagnia il denaro guadagnato in un anno, ovvero le entrate meno le uscite di denaro annuali. In media qual è il beneficio della compagnia in un anno?

Supponiamo che la compagnia disponga di capitale iniziale $K = 10^9$ e che $N = 2 \cdot 10^4$, $p = 5 \cdot 10^{-5}$, $I = 10^9$. Ciò significa che dispone di un capitale pari a $K + \frac{5}{4}pNI$ all'inizio del primo anno e incassa $\frac{5}{4}pNI$ all'inizio del secondo anno.

4. Si verifichi che la compagnia si troverà in difficoltà se avverranno più di due incidendi nel primo anno oppure più di tre incidenti nei primi due anni.

5. Qual è la probabilità che la compagnia si trovi in difficoltà allo scadere del secondo anno?