Tutorato II
Probabilità e Statistica
a.a. 2023/2024

Argomenti: v.a. discrete; leggi legate agli schemi successo-insuccesso: bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, geometrica, legge di Poisson; funzioni di ripartizione.

Esercizio 1. Una fabbrica produce monete, provenienti in egual numero da due linee di produzione diverse A e B. Le monete sono per lo più eque, tranne il 10% di quelle prodotte dalla linea A, che danno a testa con probabilità 1/8, ed il 20% delle monete che escono da B, che danno testa con probabilità 1/4.

a) Qual è la probabilità che una moneta scelta a caso sia difettosa?

b) Qual è la probabilità che una moneta scelta a caso dia testa?

c) Le monete vengono preparate in confezioni da 10 pezzi, tutte provenienti dalla stessa linea. Posto X il numero di monete difettose in una generica confezione, scrivere la densità discreta di X.

d) Si osserva che una sola moneta di una confezione scelta a caso è difettosa. È più probabile che si tratti di una confezione contenente monete provenienti dalla linea A o dalla linea B?

Esercizio 2. Si sa che in una schedina del totocalcio i tre simboli 1, X, 2 compaiono con probabilità 0.46, 0.28 e 0.26 rispettivamente. Supponiamo inoltre che una colonna del totocalcio riguardi 13 partite, com'era fino a poco tempo fa. Calcolare la probabilità che nella schedina di domenica

a) il 2 compaia più ($\geq$) di 4 volte;

b) il simbolo X non compaia mai;

c) il 2 e lo X insieme compaiano più ($\geq$) di 12 volte.

Esercizio 3. Una scatola contiene 10 monete: 8 di queste sono equilibrate, mentre le altre 2 danno testa con probabilità 2/3. Una moneta viene scelta a caso e lanciata tre volte.

a) Qual è la probabilità che si abbiano tre teste? E due teste e una croce?

b) Sapendo che sono uscite tre teste, è più probabile che la moneta scelta sia equilibrata oppure no?

c) Sempre sapendo che sono uscite tre teste, qual è la probabilità che anche un quarto lancio (della stessa moneta) dia testa?

d) Indichiamo con X_1 il risultato del primo lancio e con X_2 il risultato del secondo. Quanto vale $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$? Gli eventi $\{X_1 = 1\}$ e $\{X_2 = 1\}$ sono indipendenti?

Esercizio 4. Due urne, A e B, contengono 100 monete. In particolare: A contiene 10 monete difettose e 90 eque; B contiene 20 monete difettose e 80 eque. 10 monete vengono estratte senza reinserimento da una delle due urne. Qual è la probabilità che ve ne sia almeno una difettosa sapendo che:

(a) l'urna scelta è la A;

(b) l'urna scelta è la B;

(c) l'urna è scelta a caso tra A e B.

Esercizio 5. Una stampante è collegata ad una rete che permette l'accesso ad un massimo di 20 richieste di stampa. A questa rete sono collegati 24 operatori, ognuno dei quali, in un certo istante, invia una stampa con probabilità 3/5. Con quale probabilità la stampante è, in un dato istante, satura (cioè, non è in grado di soddisfare tutte le richieste di stampa inviate)?

Esercizio 6. Sia X una v.a. a valori in $\mathbb{N}$.

a) Dimostrare che le seguenti condizioni (i) e (ii) sono equivalenti:

$$\begin{aligned}
(i) \qquad & \mathbb{P}(X = k + m \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X = m), \text{ per ogni } k, m \in \mathbb{N}, \\
(ii) \qquad & \mathbb{P}(X \geq k + m \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq m) \text{ per ogni } k, m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Una X v.a. si dice che soddisfa la proprietà di assenza di memoria se verifica (i) o (ii). Dimostrare che:

b) se $X \sim \mathrm{Ge}(p)$ allora X soddisfa la proprietà di assenza di memoria;

c) se X soddisfa la proprietà di assenza di memoria allora $X \sim \mathrm{Ge}(p)$ per qualche p.

In altre parole, l'unica legge su $\mathbb{N}$ che soddisfa la proprietà di assenza di memoria è la legge geometrica.

Esercizio 7. Da un'urna con 10 pallina bianche e 15 palline nere, si eseguono estrazioni con reimbussolamento fino all'estrazione di una pallina nera.

a) Calcolare la probabilità che servano esattamente 10 estrazioni.

b) Calcolare la probabilità che servano almeno 5 estrazioni.

Esercizio 8. Fissati $\rho \in (0,1)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, siano

$$p_1(x) = \begin{cases} c_1 \rho^{2x} & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e} \quad p_2(x) = \begin{cases} c_2 \rho^{2x} & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire se è possibile scegliere c_1 e c_2 affinché p_1 e p_2 siano due densità discrete. E in caso affermativo, si tratta di leggi note?

Esercizio 9. Fissati n intero, $n \geq 1$, e $c \in \mathbb{R}$, sia

$$p(x) = \begin{cases} c\,x & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire se è possibile scegliere c affinché p sia una densità discreta.
[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.]

Esercizio 10. Come l'Esercizio 9 con

$$p(x) = \begin{cases} c\,x\rho^x & x = 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\rho \in (0,1)$ è fissato.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{k=0}^n \rho^k = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$.]

Esercizio 11. Come l'Esercizio 9 con

$$p(x) = \begin{cases} c\,x\rho^x & x = -1, 0, +1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\rho \in (0,1)$ è fissato.

Esercizio 12. All'inizio di ogni mese un commerciante ordina un certo prodotto per le vendite di tutto il mese. Egli può plausibilmente supporre che il numero di unità di quel prodotto richieste in un mese segua una legge di Poisson, di parametro $\lambda = 4$. Qual è il numero minimo di unità che deve ordinare perché al 90% non resti senza quel prodotto[1]?

Esercizio 13. Sia X una v.a. con funzione di distribuzione F_X: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che[2] $F_X(x^-) = \mathbb{P}(X < x)$ e che, per ogni $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$,

(a) $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$;

(b) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$;

(c) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$;

(d) $\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$;

(e) $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$.

Esercizio 14. Siano date le seguenti funzioni[3]:

$$\begin{aligned}
&F_1(x) = \Big(1 - \tfrac{1}{2+x}\Big)1_{\{x\geq 0\}}, \qquad F_2(x) = \Big(1 - \tfrac{1}{2+x}\Big)1_{\{x>0\}},\\
&F_3(x) = \Big(1 - e^{-\lambda x}\Big)1_{\{x>0\}}, \qquad F_4(x) = \Big(1 - e^{-\lambda x}\Big)1_{\{x\geq 0\}},\\
&F_5(x) = \frac{1}{2}1_{\{-8\leq x<-1\}} + \frac{3}{4}1_{\{-1\leq x\leq 72\}} + 1_{\{x>72\}},\\
&F_6(x) = -\frac{3}{4}1_{\{x<-8\}} - \frac{1}{4}1_{\{-8\leq x<-1\}} + \frac{3}{4}1_{\{x<72\}} + 1_{\{x\geq 72\}}\\
&F_7(x) = \frac{1}{2}1_{\{-8\leq x<-1\}} + \frac{3}{4}1_{\{x<72\}} + \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

[1]Ricordiamo che $X \sim \text{Po}(\lambda)$ se $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}$ quando $k \in \mathbb{N}$ e $p_X(k) = 0$ altrimenti. Per $X \sim \text{Po}(4)$, potrebbe essere utile usare la seguente tabella: per $k = 0, 1, \dots$,

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
$p_X(k) =$	0.018	0.073	0.147	0.195	0.195	0.156	0.104	0.060	0.030	0.013	$\cdots$

[2]Si ricorda che $F_X(x^-) = \lim_{n\to\infty} F_X(x - 1/n)$.

[3]Si ricorda che, per $A \subset \mathbb{R}$, $1_{\{x\in A\}}$ o anche $1_A(x)$ vale 1 per $x \in A$ e 0 altrimenti.

Per ogni $i = 1, \dots, 7$, disegnare F_i e dire se F_i può essere la funzione di ripartizione di qualche v.a.[4] X_i e in caso affermativo, dire quanto vale $\mathbb{P}(X_i = x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 15. Sia X una v.a discreta, a valori in E_X, con densità discreta $p_X(x)$, $x \in E_X$, e funzione di distribuzione $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Fissato $N \geq 1$, siano Y_N e Z_N due "troncamenti" di X:

$$Y_N = \begin{cases} -N & \text{se } X < -N \\ X & \text{se } |X| \leq N \\ N & \text{se } X > N \end{cases} \qquad Z_N = \begin{cases} X & \text{se } |X| \leq N \\ 0 & \text{se } |X| > N \end{cases}$$

o, equivalentemente, $Y_N = -N1_{\{X<-N\}} + X1_{\{|X|\leq N\}} + N1_{\{X>N\}}$ e $Z_N = X1_{\{|X|\leq N\}}$.

(a) Dire quali valori possono assumere Y_N e Z_N e con quale probabilità. Giustificare il termine "troncamento".

(b) Disegnare le funzioni di ripartizione G_N e H_N rispettivamente di Y_N e Z_N.

(c) Come si comportano G_N e H_N quando $N \to +\infty$?

Esercizio 16. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità.

a) Sia $X : \Omega \to E$, dove $E \subset \mathbb{R}$ ha cardinalità finita o al più numerabile. Dimostrare che X è una v.a. se e solo se $\{X = x\} \in \mathcal{A}$ per ogni $x \in E$.

b) Usando **a)**, dimostrare che la classe delle v.a. discrete è chiusa sotto operazioni standard, cioè: se X è una v.a. discreta e $a \in \mathbb{R}$ allora aX è una v.a. discreta; se X e Y sono v.a. discrete allora $X + Y$ e XY sono v.a. discrete; se X e Y sono v.a. discrete e $Y \neq 0$ allora X/Y è una v.a. discreta.

c) Sia X una v.a. discreta a valori in E. Sia $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$, l'insieme delle parti di E. Definiamo la "legge di X" come

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{E} \to [0, 1], \qquad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \quad A \in \mathcal{E}.$$

Dimostrare che $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P}_X)$ è uno spazio di probabilità.

[4] Ovvero, F_i soddisfa alle 3 proprietà caratteristiche: 1) F_i è monotona non decrescente; 2) $\lim_{x\to-\infty} F_i(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F_i(x) = 1$; 3) F_i è càdlàg, cioè continua da destra ($F_i(x^+) = F_i(x)$) e limitata da sinistra ($F_i(x^-)$ finito).