

Argomenti: probabilità uniforme; probabilità condizionata; formula di Bayes; formula delle probabilità totali; indipendenza.

Esercizio 1. Siano A, B, C tre eventi. Calcolare $\mathbb{P}(A \cap B^c)$ e $\mathbb{P}(A \cap (B^c \cup C))$ sapendo che $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$ e $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/9$.

[Sugg: si ricorda che $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$.]

Esercizio 2. (a) Dati gli eventi $A = \{\text{Un individuo è affetto da HIV}\}$ e $B = \{\text{Un individuo è risultato positivo al test HIV}\}$, si traducano in simboli le seguenti informazioni (ovvero, **formalizzare** le affermazioni che seguono con il linguaggio proprio del calcolo delle probabilità).

- a.1 La probabilità che un individuo sia affetto da HIV e risulti positivo al test è 0.4;
- a.2 la probabilità che un individuo malato risulti positivo al test è 0.8;
- a.3 la probabilità che un individuo sano non risulti positivo al test è 0.9;
- a.4 la probabilità che un individuo sia sano e risulti positivo al test è 0.05;
- a.5 la probabilità che un individuo che è risultato negativo al test sia effettivamente sano è $9/11$.

(b) Sfruttando le informazioni a.1–a.4, si calcoli la probabilità che:

- b.1 un individuo sia affetto da HIV oppure risulti positivo al test;
- b.2 un individuo sia sano e risulti negativo al test;
- b.3 un individuo sia malato e non risulti positivo al test;
- b.4 un individuo sia sano e non risulti positivo al test;
- b.5 un individuo affetto da HIV risulti negativo al test.

Esercizio 3. [Risolvere l'esercizio costruendo uno spazio campionario Ω ed una probabilità $\mathbb{P}$ su $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ad hoc] Due numeri vengono estratti da un'urna contenente n palline numerate da 1 a n . Calcolare la probabilità che i due numeri estratti siano consecutivi nell'ipotesi che le estrazioni vengano effettuate:

- 1. senza rimbussolamento (o “senza rimpiazzo”: le palline che via via sono estratte non vengono reinserite nell'urna);
- 2. con rimbussolamento (o “con rimpiazzo”: le palline che via via sono estratte vengono reinserite nell'urna).

Esercizio 4. [Risolvere l'esercizio costruendo uno spazio campionario Ω ed una probabilità $\mathbb{P}$ su $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ad hoc] Due amici si trovano in coda ad uno sportello, insieme ad altre $n - 2$ persone.

1. Qual è la probabilità che siano separati (esattamente) da k persone?
2. Qual è la probabilità che siano separati da almeno 2 persone?

Esercizio 5. In un gioco il giocatore e il banco lanciano entrambi un dado. Il giocatore vince solo se il suo numero è strettamente più grande di quello del banco. Qual è la probabilità che il giocatore vinca?

[Sugg: si ricorda che $\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$.]

Esercizio 6. (a) Siano A, B due eventi indipendenti tali che $A, B, A \cap B$ abbiano uguale probabilità $p \in [0, 1]$. Calcolare tutti i possibili valori di p .

(b) Siano A, B, C tre eventi, a due a due indipendenti, tali che $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$, $\mathbb{P}(C) = 2/5$. Calcolare, qualora i dati lo consentano, $\mathbb{P}(A \cap (B^c \cup C))$ e $\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B^c \cap C))$.

(c) Siano A, B, C eventi indipendenti. Provare che anche A, B^c, C sono indipendenti.

(d) Siano A, B, C eventi indipendenti, aventi probabilità come nel punto (b). Calcolare, qualora i dati lo consentano, $\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B^c \cap C))$ e $\mathbb{P}((A \cup B^c) \cap (B^c \cup C))$.

Esercizio 7. Siano A, B, C tre eventi.

- (a) Mostrare che se A, B, C sono indipendenti allora $A \cup B$ e C sono ancora eventi indipendenti.
- (b) Mostrare (con un controesempio!) che non vale il viceversa (ovvero, si esibiscano 3 eventi A, B, C tali che $A \cup B$ e C sono indipendenti ma A, B, C sono dipendenti).

Esercizio 8. Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi indipendenti.

1. Dimostrare che per ogni $k \in \{2, \dots, n\}$ e per ogni $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ si ha

1.1 per ogni $1 \leq \ell \leq k-1$,

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{i_j}\right) \cap \left(\bigcap_{j=\ell+1}^k A_{i_j}^c\right)\right) = \left(\prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}(A_{i_j})\right) \times \left(\prod_{j=\ell+1}^k \mathbb{P}(A_{i_j}^c)\right);$$

$$1.2 \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}^c\right) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(A_{i_j}^c).$$

2. Siano $B_1, \dots, B_n$ eventi tali che $B_1 \in \{A_1, A_1^c\}, \dots, B_n \in \{A_n, A_n^c\}$ (cioè, $B_i = A_i$ oppure $B_i = A_i^c$ per ogni $i = 1, \dots, n$). Dimostrare che per ogni $k \in \{2, \dots, n\}$ e per ogni $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ gli eventi $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$ sono indipendenti. Dedurre in particolare che gli eventi $A_1^c, \dots, A_n^c$ sono indipendenti.

Esercizio 9. 10 persone si incontrano in un viaggio organizzato che dura 16 giorni.

1. Uno dei partecipanti dice: “La probabilità che ci sia almeno uno del gruppo che festeggia il compleanno durante il viaggio è molto alta”. Cosa ne pensate?
2. Quanto dovrebbe durare il viaggio perché la probabilità che almeno uno dei 10 partecipanti festeggi il compleanno sia ≥ 0.5 ? ≥ 0.9 ?

3. Quanti dovrebbero essere i partecipanti perché durante i 16 giorni di viaggio la probabilità che almeno uno di loro festeggi il compleanno sia ≥ 0.5 ? ≥ 0.9 ?

Per risolvere l'esercizio, si considerino le seguenti ipotesi "di modello": trascuriamo gli anni bisestili, assumiamo che la probabilità di nascere in un giorno fissato dell'anno sia uniforme (il che non è del tutto vero) e che le nascite si verifichino in modo indipendente (nessun gemello, ad esempio).

Esercizio 10. Un dado viene lanciato 3 volte. Sia X_i il risultato dell' i -esimo lancio e

$$A_1 = \{X_1 = X_2\} \quad A_2 = \{X_2 = X_3\} \quad A_3 = \{X_1 = X_3\}.$$

$\mathcal{K} = \{A_1, A_2, A_3\}$ è una famiglia di eventi indipendenti?

Esercizio 11. In un mazzo di n chiavi, una sola chiave apre una certa porta. Per aprire la porta, si prova una chiave alla volta e se non è quella giusta,

- a) la si elimina dal mazzo;
- b) la si reinserisce nel mazzo (si immagina, in questo caso, di rimescolare tutte le chiavi).

Calcolare la probabilità di aprire la porta al k -esimo tentativo nei due casi **a)** e **b)**. Qual è la probabilità che occorranza almeno j tentativi prima di aprire la porta? Siamo sicuri che nel caso **b)** la porta prima o poi si aprirà?

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che, per ogni $\alpha \in (-1, 1)$ e $\ell \in \mathbb{N}$, si ha $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$.]

Esercizio 12. Un'urna contiene 90 palline numerate da 1 a 90, che vengono estratte una dopo l'altra senza rimpiazzo.

- a) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero più piccolo ($\leq$) di 60?
- b) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero dispari?

Esercizio 13. Ugo, Ciro, Alessandro e Massimiliano sono candidati per formare l'equipaggio di una navetta spaziale, che deve essere composto da due persone. L'equipaggio verrà deciso per estrazione a sorte.

- a) Qual è la probabilità che Ugo faccia parte dell'equipaggio?
- b) Qual è la probabilità che i prescelti siano Ugo e Ciro?