II esonero di Probabilità e Statistica
a.a. 2023/2024
06 Giugno 2024

Esercizio 1. Un'apparecchiatura elettronica, $\mathcal{A}$, è composta da due unità indipendenti poste in parallelo e ciascuna di durata che segue una legge Exp(2). Una seconda apparecchiatura, $\mathcal{B}$, indipendente da $\mathcal{A}$, è anch'essa composta da due unità indipendenti, poste però in serie e, ciascuna, con durata Exp(1). Calcolare la probabilità che $\mathcal{A}$ duri più a lungo di $\mathcal{B}$.

Esercizio 2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio su $\mathbb{R}^2$ di densità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}(x-y)^2}}{2n(x + y)} \mathbb{1}_{2e^{-n}<x+y<2e^n}.$$

Qui n è un intero ≥ 1.

a) Posto $U = \ln(\frac{X+Y}{2})$ e $V = \frac{X-Y}{2}$, dimostrare che $U \perp\!\!\!\perp V$, $U \sim \mathrm{Un}(-n, n)$ e che V è gaussiana.

b) Poiché la legge di U dipende da n, scriveremo U_n al posto di U. Studiare la convergenza in legge della successione $\{\alpha_n U_n\}_n$, con $\{\alpha_n\}_n \subset [0, +\infty)$, nei casi:

b1) $n\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, **b2)** $n\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c > 0$, **b3)** $n\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c) Studiare la convergenza in probabilità di $\{\alpha_n U_n V\}_n$ nell'ipotesi **b1)**.

Esercizio 3. Per $a \in \mathbb{R}$, sia $C_a = \begin{pmatrix} 3a & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Determinare $A \subset \mathbb{R}$ tale che C_a è una matrice di covarianza per ogni $a \in A$.

D'ora in poi (X, Y) denota un vettore aleatorio su $\mathbb{R}^2$ tale che $\mathbb{E}(Y) = \theta = -\mathbb{E}(X)$ e con matrice di covarianza C_a, con $a \in A$.

b) Supponiamo (X, Y) sia un vettore gaussiano. Determinare, se esiste, $a \in A$ tale che $X + 2Y + 1$ e $X - Y - 1$ sono indipendenti.

c) Siano (X_n, Y_n), $n = 1, \ldots, N$, copie indipendenti di (X, Y). Facendo uso delle osservazioni $U_n = 2X_n - Y_n$, $n = 1, \ldots, N$, trovare un IF al 95% per θ sapendo che $a < 3$. [Oss.: qui non si fanno ipotesi sulla legge di (X, Y)]

Esercizio 4. Sia $\{X_n : n \geq 0\}$ una catena di Markov su $E = \{1, 2, 3\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/3-\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

dove $\alpha \in [0, 2/3]$ è un parametro fissato.

a) Classificare gli stati della catena, trovare le classi irriducibili e le distribuzioni stazionarie.

b) Supponiamo che $\alpha = 2/3$ e che $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 2) = 1/2$. Qual è lo stato meno probabile per X_2?

c) Per $\alpha = 0$, calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^i[X_n]$ con $i = 1, 2, 3$, giustificando la risposta.