

Esercizio 1. Da un'urna contenente 5 palline gialle e 5 rosse vengono tolte due palline e la composizione dell'urna viene modificata come segue: le due palline vengono definitivamente eliminate se risultano dello stesso colore e inserite nuovamente nell'urna se di colore diverso. Da questa nuova urna, che chiameremo $\mathcal{U}$, vengono effettuate due estrazioni con rimpiazzo.

- a) Calcolare la probabilità che le due palline estratte da $\mathcal{U}$ siano dello stesso colore.
- b) Calcolare la probabilità che dall'urna originaria siano state tolte palline dello stesso colore noto che da $\mathcal{U}$ vengono estratte due palline dello stesso colore.

Esercizio 2. Un test è composto di 20 domande a risposta multipla e ciascuna domanda ha 4 possibili risposte, di cui una sola è esatta. Per ogni risposta corretta vengono assegnati 2 punti e 0 punti se sbagliata.

- a) Se il test viene svolto a caso, qual è il punteggio medio che si può ottenere?
- b) Lo stesso test viene modificato come segue: per ciascuna domanda, viene eliminata una risposta errata ma, per ogni risposta sbagliata, viene ora assegnato il punteggio -1 . Quanti punti occorre assegnare ad ogni risposta corretta affinché il secondo test, sempre svolto a caso, dia in media un punteggio maggiore?

Esercizio 3. Sia $p \in (0, 1)$ e sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete di densità congiunta

$$p_{X,Y}(x, y) = p^y(1 - p)^2 \mathbb{1}_{\{x, y \in \mathbb{N}: y \geq x\}}.$$

- a) X e Y sono indipendenti?
- b) Calcolare $\mathbb{P}(Y \leq X + 2)$.
- c) Calcolare $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$.
- d) Posto $Z = Y - X$, dimostrare che $X \perp\!\!\!\perp Z$ e che $X, Z \sim \text{Geo}(p)$.
- e) Scrivere la retta di regressione di X rispetto a Y . [Sugg: usare c) oppure d)]

Esercizio 4. Siano $X_1, X_2, \dots$ v.a. i.i.d. di legge $\text{Po}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) e sia $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- a) Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n > 2n\lambda) = 0$.
- b) Determinare n tale che $\mathbb{P}(S_n \leq 2n\lambda) > 0.99$. Se $\lambda > 1$, è possibile trovare un valore di n che non dipenda λ ?