

PROVA SCRITTA DI PROBABILITÀ E STATISTICA
I APPELLO, II SESSIONE, A.A. 2023/2024
2 SETTEMBRE 2024

Esercizio 1. Un'urna contiene 2 palline rosse e 4 gialle. Due amici, Alfio e Serafino, giocano nel modo seguente: le palline vengono estratte ad una ad una e messe da parte. Serafino vince se l'ultima pallina è rossa, altrimenti vince Alfio.

- a) Qual è la probabilità che vinca Serafino?
- b) Qual è la probabilità che vinca Serafino se la prima pallina estratta è rossa?
- c) Qual è la probabilità che vinca Serafino e che la prima pallina estratta sia rossa?
- d) Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia stata rossa se è Alfio a vincere?

Esercizio 2. Siano $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, \dots$ v.a. indipendenti bernoulliane di parametro $p \in (0, 1)$. Per $n \geq 1$, siano

$$U_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{e} \quad V_n = Y_1 + \dots + Y_n.$$

- a) Studiare la convergenza in legge di $\left\{\frac{U_n - V_n}{\sqrt{n}}\right\}_n$.
- b) Studiare la convergenza in probabilità di $\left\{\frac{2U_n - 3V_n}{n}\right\}_n$.

Esercizio 3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio su \mathbb{R}^2 assolutamente continuo con densità di probabilità

$$f_{X,Y}(x, y) = ce^{-(2y-x)} \mathbb{1}_{y>x>0},$$

dove $c \in \mathbb{R}$.

- a) Calcolare c .
- b) Calcolare la densità congiunta di $U = X$ e $V = Y - X$.
- c) Sia Z una v.a. gaussiana a valori in \mathbb{R} , di media $m = \mathbb{E}(3X)$ e varianza $\sigma^2 = \text{Var}(X - Y)$. Calcolare $\mathbb{P}(|Z| > 1)$.

Esercizio 4. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- a) Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{34}^{(n)}$ dopo aver motivato l'esistenza del limite.
- b) Calcolare il tempo medio di primo arrivo nello stato 3 partendo dallo stato 1.