Prova scritta di Probabilità e Statistica
II appello, I sessione, a.a. 2023/2024
22 Luglio 2024

Esercizio 1. Una scatola contiene 5 monete: 2 equilibrate e 3 che danno testa con probabilità $p \in [0,1]$. Una moneta viene scelta a caso dalla scatola e lanciata ripetutamente.

a) I lanci sono indipendenti, almeno per qualche p?

b) Supponiamo $p = 1/4$ e che la moneta sia lanciata n volte. Quanto deve essere grande n affinché la probabilità che la moneta sia equilibrata sapendo che gli n lanci hanno dato sempre testa sia $\geq 75\%$?

Esercizio 2. Sia (X,Y) una v.a. discreta con densità congiunta

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{2^x} & \text{se } x \in \mathbb{N}_* \text{ e } y = x \\ \dfrac{1-\theta}{2^x} & \text{se } x \in \mathbb{N}_* \text{ e } y = -x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\mathbb{N}_* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\theta \in (0,1)$ è un parametro fissato.

a) Calcolare $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$, discutendo per quali valori di x ha senso.

b) Discutere l'esistenza e calcolare media e varianza di $U = Y/X$.

c) Facendo uso di n osservazioni i.i.d. $U_1, \dots, U_n$ di U, determinare un IF al 99% per il parametro θ.

Esercizio 3. Per $n \geq 1$ intero, sia $B_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1/n^2\}$ il disco di raggio $1/n$ e sia (X_n, Y_n) un vettore aleatorio in $\mathbb{R}^2$ di legge uniforme su B_n. Posto Z_n la distanza di (X_n, Y_n) dall'origine,

a) calcolare la f.r. di Z_n;

b) studiare la convergenza in legge della successione $\{\alpha_n Z_n\}_n$ nei tre casi

$$(i) \quad \alpha_n = \sqrt{n}, \quad (ii) \quad \alpha_n = n, \quad (iii) \quad \alpha_n = n\sqrt{n}.$$

In caso di convergenza, si fa precisa richiesta di individuare la legge limite.

Esercizio 4. Sia $\{X_n : n \geq 0\}$ una catena di Markov su $E = \{1,2,3\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

e sia $\mu = (1/2, 1/2, 0)$ la distribuzione iniziale.

a) Classificare gli stati della catena e trovare le classi irriducibili

b) Calcolare $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_2 = 3)$.

c) Calcolare $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n + X_{n+1} = 4)$.

[Risposte prive di adeguate giustificazioni non saranno prese in considerazione]