**Diario delle lezioni e del tutorato di**

# Probabilità e Statistica

**a.a. 2023/2024**

**L. Caramellino**
**B. Pacchiarotti**

`www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_2324/ps.htm`

**04/03/2024 - Lezioni 1, 2, 3** [Caramellino]
Breve introduzione al corso. Fenomeni deterministici ed aleatori. Spazi campionari, $\sigma$-algebre (o insiemi degli eventi), misure di probabilità. Lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Esempi. La probabilità uniforme. Proprietà generali della probabilità.

[cfr. Baldi, Par. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4]

**06/03/2024 - Lezioni 4, 5** [Caramellino]
Monotonia della probabilità. La probabilità condizionata (anche come "nuova" misura di probabilità). Conseguenze: la formula delle probabilità totali e la formula di Bayes. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.5]

**07/03/2024 - Lezioni 6, 7, 8** [Caramellino]
Indipendenza tra eventi. Le prove ripetute e lo schema (successo-insuccesso) di Bernoulli. Richiami di calcolo combinatorio (permutazioni, disposizioni, combinazioni). Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.5, 1.6]

**11/03/2024 - Lezioni 9, 10, 11** [Caramellino]
Urne composte da due classi diverse di elementi ed estrazioni: lo schema con rimpiazzo (di Bernoulli, legge binomiale) e senza rimpiazzo (legge ipergeometrica). Esempi ed esercizi.
Definizione di variabile aleatoria e discussione sulle richieste della definizione. Legge di una variabile aleatoria. Variabili aleatorie discrete. Densità discreta. Esempi: v.a. bernoulliane (funzione indicatrice) e binomiali.

[cfr. Baldi, Par. 2.1, 2.2]

**13/03/2024 - Tutorato 1 (2 ore)** [Caramellino]

[cfr. Team del corso]

**14/03/2024 - Lezioni 12, 13, 14** [Caramellino]
Legge ipergeometrica. Esempi ed esercizi. Legge geometrica e geometrica modificata. Esempi ed esercizi. Proprietà di mancanza di memoria delle leggi geometriche. Caratterizzazione della legge geometrica come unica legge discreta senza memoria. La legge di Poisson, anche come legge limite di leggi binomiali. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.2]

**18/03/2024 - Lezioni 15, 16, 17** [Caramellino]
Comportamento asintotico della legge ipergeometrica e convergenza alla legge binomiale. Le proprietà caratteristiche delle densità discrete ed esistenza di una v.a. con densità discreta data. Funzioni di ripartizione: definizione e proprietà caratteristiche. Funzioni di ripartizione di v.a. discrete. Esempi.
V.a. discrete $m$-dimensionali: densità congiunta e marginali. Calcolo delle marginali dalla densità congiunta.

[cfr. Baldi, Par. 2.2, 2.3, 2.4]

**20/03/2024 - Tutorato 2 (2 ore)** [Caramellino]

[cfr. Team del corso]

**21/03/2024 - Lezioni 18, 19, 20** [Caramellino]
Esistenza di più leggi congiunte aventi le stesse marginali. La legge uniforme. Esempi ed esercizi sull'uso della densità (discreta) congiunta. Definizione di indipendenza tra v.a. Caso v.a. discrete: equivalenza fra indipendenza, fattorizzazione della densità discreta congiunta nel prodotto delle densità marginali e fattorizzazione della densità discreta congiunta nel prodotto di funzioni che dipendono ciascuna da una sola variabile. Esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.4]

**25/03/2024 - Lezioni 21, 22, 23** [Caramellino]
Densità condizionale. Esempi ed esercizi. Funzioni di variabili casuali, indipendenza e calcolo delle densità. Calcoli con le densità. La densità della somma di v.a. discrete quando è nota la densità congiunta. Caso particolare quando le v.a. sono indipendenti. Esempio: somma di binomiali indipendenti con lo stesso parametro $p$.

[cfr. Baldi, Par. 2.4, 2.5]

**27/03/2024 - Lezioni 24, 25** [Caramellino]
Somma di Poisson e di geometriche indipendenti. Legge del max e del min di v.a. indipendenti. Esempi ed esercizi.
Definizione di speranza matematica per v.a. discrete.

[cfr. Baldi, Par. 2.5, 2.6]

**27/03/2024 - Lezioni 26, 27, 28** [Caramellino] Esistenza e calcolo della speranza matematica per funzioni di variabili aleatorie. La media aritmetica come la speranza matematica di una v.a. uniforme su un insieme finito. Le proprietà della speranza matematica (linearità, positività etc.). Esistenza della media nel caso di v.a. il cui valore assoluto si stima dall'alto con una v.a. che ha speranza matematica finita; in particolare, esistenza nel caso di v.a. limitate. Calcolo della speranza matematica delle seguenti leggi: uniforme in un insieme finito (media aritmetica), bernoulliana (caso particolare: funzione indicatrice), binomiale, pergeometrica, geometrica e geometrica modificata, di Poisson. Esempi ed esercizi. Fattorizzazione della media nel caso di v.a. indipendenti e caratterizzazione delle v.a. indipendenti tramite fattorizzazione della media per funzioni limitate ($X \perp\!\!\!\perp Y$ sse per ogni funzione $\varphi, \psi$ limitate si ha $\mathbb{E}(\varphi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(\varphi(X))\mathbb{E}(\psi(Y))$). La media condizionale $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$. Esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.6]

**03/04/2024 - Tutorato 3 (2 ore)** [Caramellino]

[cfr. Team del corso]

**04/04/2024 - Lezioni 29, 30, 31** [Caramellino]

Momenti e momenti centrati. Esistenza del momento di ordine $r$ quando esiste il momento di ordine $k \geq r$. La somma di v.a. che hanno momento di ordine $k$ ha ancora momento di ordine $k$. La varianza. Interpretazione della media e della varianza: media come migliore costante che approssima una v.a. e varianza come indicatore della qualità dell'approssimazione ("dispersione" intorno alla media). La disuguaglianza $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2$. Disuguaglianza di Markov e di Chebyshev. Proprietà della varianza (dilatazione e invarianza per traslazioni deterministiche). La covarianza. Relazione tra non correlazione ed indipendenza di due v.a. Varianza della somma di v.a. Calcolo della varianza per v.a. di legge bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, di Poisson, geometrica e geometrica modificata, ipergeometrica.

[cfr. Baldi, Par. 2.7]

**08/04/2024 - Lezioni 32, 33, 34** [Caramellino]

Coefficiente di correlazione. La disuguaglianza di Caucy-Schwarz. La retta di regressione; significato di "dipendenza positiva" e "dipendenza negativa" in termini del segno della covarianza. Esempi ed esercizi.

La convergenza in probabilità e la legge (debole) dei grandi numeri per v.a. discrete. La disuguaglianza di Chebycev per determinare la velocità di convergenza nella LDGN. Esempi.

[cfr. Baldi, Par. 2.7, 2.8]

**10/04/2024 - Tutorato 4 (2 ore)** [Caramellino]

[cfr. Team del corso]

**11/04/2024 - Lezioni 35, 36, 37** [Caramellino]

Richiami sulle proprietà delle funzioni di ripartizione. V.a. continue. V.a. assolutamente continue: definizione di densità e proprietà; esistenza della densità nota la funzione di ripartizione. Esempi di leggi assolutamente continue: legge uniforme ed esponenziale. La legge esponenziale come l'unica legge continua che verifica la proprietà di assenza di memoria. Calcolo di leggi: densità di una v.a. che è funzione di una v.a. assolutamente continua. Esempio: legge di $X^2$ quando $X$ ha densità continua.

[cfr. Baldi, Par. 3.1, 3.2]

**15/04/2024 - Lezioni 38, 39, 40** [Caramellino]

Legge di $aX + b$, $a \neq 0$, quando $X$ ha densità continua. La legge del max e del min di due v.a. indipendenti ed assolutamente continue. Vettori aleatori a.c. di $\mathbb{R}^2$: densità congiunta e proprietà; esistenza delle densità marginali e rappresentazione in termini di integrale. La legge uniforme su un insieme di $\mathbb{R}^2$ di misura positiva e finita. Esempi. V.a. assolutamente continue e indipendenti: fattorizzazione della densità nel prodotto delle densità marginali. Viceversa, se la densità congiunta si fattorizza nel prodotto di due funzioni dipendenti ciascuna da una sola variabile allora le v.a. sono indipendenti. Densità della somma di v.a. che hanno densità continua congiunta. Esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 3.2, 3.3, 3.4]

**17/04/2024 - Lezioni 41, 42** [Caramellino]
La legge gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$ e le proprietà (in particolare, se $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ allora $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$). Vettori aleatori in $\mathbb{R}^n$ assolutamente continui e densità congiunta su $\mathbb{R}^n$. Calcoli con densità congiunte: uso del teorema del cambio di variabile (TCV) per calcolare la densità di $\phi(X)$ quando $X$ è una v.a. con densità e $\phi$ è diffeomerfismo. Esempio: legge di una trasformazione lineare-affine di un vettore aleatorio con densità. Esempi sull'uso del teorema del cambio di variabile per il calcolo di densità. Versione bis dell'uso del TCV: basta che le restrizioni di $\phi$ a $n$ aperti $O_1, \dots, O_n$ a due a due disgiunti siano dei diffeomorfismi e che $\mathbb{P}(X \in O_1 \cup \cdots \cup O_n) = 1$.

[cfr. Baldi, Par. 3.3, 3.4, 3.7]

**18/04/2024 - Lezioni 43, 44, 45** [Caramellino]
Esercizi sul TCV. Definizione di legge gaussiana standard. Speranza matematica per v.a. con densità: definizione. Speranza matematica per v.a. che sono funzioni di v.a. con densità continua. Le proprietà. Esempi: speranza matematica della legge uniforme, della legge gamma ed esponenziale, della legge gaussiana. Momenti e momenti centrati. Varianza. Esempi: varianza della legge uniforme, della legge gamma ed esponenziale, della legge gaussiana standard. Legge normale $N(\mu, \sigma^2)$: proprietà, esistenza dei momenti, calcolo della media e della varianza usando la standardizzazione.

[cfr. Team del corso e Baldi, Par. 3.5, 3.6]

**22/04/2024 - Esonero**

[cfr. Team del corso]

**24/04/2024 - Tutorato 5 (2 ore)** [Caramellino]

[cfr. Team del corso]

**29/04/2024 - Lezioni 46, 47, 48** [Caramellino]
Matrice di covarianza e proprietà. Calcolo della matrice di covarianza di una trasformazione lineare affine. I quantili della legge gaussiana ed esercizi. Variabili aleatorie complesse. La funzione caratteristica (f.c.). Calcolo esplicito per la legge binomiale, geometrica, di Poisson, esponenziale, Gamma, uniforme. Le proprietà: la f.c. della somma di v.a. indipendenti; la f.c. di una trasformazione lineare-affine; il legame tra la derivabilità della f.c. ed i momenti (s.d.).

[cfr. Baldi, Par. 3.5, 3.6, 3.13]

**30/04/2024 - Tutorato 6 (solo consegnato)** [Caramellino]

[cfr. Team del corso]

**02/05/2024 - Lezioni 49, 50, 51** [Caramellino]
La f.c. della legge gaussiana. Altre proprietà legate alle f.c.: se due v.a. hanno la stessa f.c. allora hanno la stessa legge (s.d.); uso della f.c. per dimostrare che una trasformazione linerare di gaussiane indipendenti ha legge gaussiana; caratterizzazione della f.c. di v.a. indipendenti. La f.c. delle coordinate di un vettore aleatorio. La legge normale multivariata: definizione in termini della funzione caratteristica; interpretazione dei parametri (vettore delle medie e matrice di covarianza). Scrittura esplicita della densità di probabilità quando la matrice di covarianza è non degenere e cenni sul fatto che la densità esiste se e solo se la matrice di covarianza è non degenere. Proprietà dei vettori gaussiani: legge gaussiana delle componenti; equivalenza tra componenti indipendenti e covarianza nulla quando il vettore aleatorio ha legge gaussiana; legge normale di una trasformazione lineare affine di un vettore aleatorio normale.

[cfr. Baldi, Par. 3.13, 3.14]

**06/05/2024 - Lezioni 52, 53, 54** [Caramellino]
Esercizi sulla legge gaussiana multivariata.
La convergenza quasi certa e la convergenza in probabilità: definizioni. La convergenza quasi certa implica la convergenza in probabilità ma non vale il viceversa (con controesempio). Proprietà della convergenza q.c. e in probabilità (per "$\overset{*}{\to}$" uguale a "$\overset{\text{q.c.}}{\to}$" oppure "$\overset{P}{\to}$": se $X_n \overset{*}{\to} X$ e $X_n \overset{*}{\to} Y$ allora $X = Y$ q.c.; se $X_n \overset{*}{\to} c$ allora per ogni $f$ continua si ha $f(X_n) \overset{*}{\to} f(c)$; se $X_n \overset{*}{\to} X$ e $Y_n \overset{*}{\to} Y$ allora $X_n + Y_n \overset{*}{\to} X + Y$; se $X_n \overset{*}{\to} X$ e $c_n \to c$ allora $c_n X_n \overset{*}{\to} cX$).
La legge dei grandi numeri riscritta in termini di convergenza in probabilità. Conseguenza: stimatore classico (non distorto e consistente) della media.

[cfr. Baldi, 3.14; note sulla convergenza]

**08/05/2024 - Tutorato 7 (2 ore)** [Caramellino]

[cfr. Team del corso]

**09/05/2024 - Lezioni 55, 56, 57** [Caramellino]
Lo stimatore classico, non distorto e consistente, della varianza.
La convergenza in legge, anche come convergenza più debole della convergenza in probabilità: se $X_n \overset{P}{\to} X$ allora $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$, ma non vale il viceversa (con controesempio). L'implicazione inversa quando $X = c$. Il teorema di convergenza di Lévy (senza dimostrazione) e, come conseguenza, l'unicità della legge limite. Esempi ed esercizi sulla convergenza in legge. In particolare, convergenza in legge delle v.a. $\mathrm{Bi}(n, \lambda/n)$ ad una v.a. di legge $\mathrm{Po}(\lambda)$.

[cfr. Note sulla convergenza; Baldi, Par. 4.1, 4.2]

**13/05/2024 - Lezioni 58, 59, 60** [Caramellino]
Problemi ed esercizi sulla convergenza in legge e in probabilità (in particolare: se $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$ e $a, b \in \mathbb{R}$ allora $aX_n + b \overset{\mathcal{L}}{\to} aX + b$).
Cenni sul logaritmo complesso. Il Teorema Limite Centrale (TLC). Applicazione del TLC: velocità di convergenza nella LGN.
[cfr. Baldi, Par. 4.3, 4.4]

**15/05/2024 - Lezioni 61, 62** [Pacchiarotti]
L'approssimazione normale. Primo esempio di rilievo: approssimazione normale della legge $\mathrm{Bi}(n,p)$ con $n$ grande. La "correzione di continuità" nell'approssimazione normale per v.a. discrete, in particolare per la legge $\mathrm{Bi}(n,p)$ con $n$ grande. Esercizi sull'approssimazione normale. L'approssimazione normale della legge $\Gamma(n,\lambda)$, per $n$ grande. Esempi ed esercizi. Intervalli di fiducia: definizione formale. Uso dell'approssimazione normale per il calcolo di intervalli di fiducia approssimati (varianza nota).

[cfr. Baldi, Par. 4.4, parte del 4.5]

**16/05/20243 - Lezione 63 e Tutorato 8 (2 ore)** [Pacchiarotti] Intervalli di fiducia. Caso varianza incognita: 1) uso di una stima dall'alto, se esiste; 2) uso dello stimatore classico non distorto e consistente. Esempi.

[cfr. Baldi, Par. 4.5 ]

**20/05/2024 - Lezioni 64, 65, 66** [Pacchiarotti] Processi aleatori. Introduzione alle Catena di Markov. Definizione formale di catena di Markov. Esempi. Funzione o matrice di transizione markoviana come matrice stocastica. La distribuzione iniziale. La matrice di transizione in $m$ passi. La distribuzione congiunta di una catena di Markov in $k$ istanti prefissati. La relazione di comunicazione tra stati della catena. Classi chiuse e irriducibili; stati assorbenti.

[cfr. Baldi, Par. 5.1, 5.2, parte del 5.3]

**22/05/2024 - Lezioni 67, 68** [Pacchiarotti]
Stati transitori e ricorrenti. Caratterizzazione degli stati transitori (e quindi ricorrenti) per catena di Markov a stati finiti [s.d.]. Decomposizione degli stati in unione disgiunta dell'insieme degli stati transitori e delle classi irriducibili [s.d.]. Esempi ed esercizi. Le distribuzioni invarianti. Il teorema di Markov-Kakutani sull'esistenza di una distribuzione invariante per catene a stati finiti.

[cfr. Baldi, Par. 5.3, parte del 5.4]

**23/05/2024 - Lezioni 69, 70, 71** [Pacchiarotti]
Catene regolari. Il criterio di regolarità per catene finite, irriducibili e tali che almeno un elemento della diagonale della matrice di transizione sia positivo. Il teorema di Markov [s.d.]. Il teorema di unicità della distribuzione invariante per catene finite ed irriducibili. Esempi. Distribuzione invariante per matrici di transizione bistocastiche. Stazionarietà di una distribuzione reversibile. Esempio: passeggiata a caso su grafi connessi. Esempi di passeggiate a caso su grafo che danno luogo ad una catena regolare oppure ad una catena non regolare.

[cfr. Baldi, Par. 5.4]