Tutorato X
Probabilità e Statistica
a.a. 2022/2023

Argomenti: catene di Markov: classificazione degli stati; catene irriducibili e regolari; distribuzioni stazionarie; probabilità e tempi medi di passaggio.

Esercizio 1. Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov su E, con E finito. Sia $C \subset E$ una classe irriducibile. Mostrare che ogni stato i di C è ricorrente.

[Oss.: potrebbe essere utile ricordare il criterio per gli stati transitori: *in una catena di Markov a stati finiti uno stato i è transitorio se e solo se esiste uno stato j tale che $i \rightsquigarrow j$ ma $j \not\rightsquigarrow i$.*]

Esercizio 2. Sia P una matrice stocastica 6×6 del tipo ($*$=numero > 0)

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

a) In riferimento alla catena di Markov che ha P come matrice di transizione, trovare tutte le classi irriducibili, gli stati assorbenti e gli stati transitori.

b) Cosa cambia se nella posizione $(5, 6)$ si sostituisce lo 0 con $*$? E se si aggiungesse un ulteriore $*$ nella posizione $(1, 4)$?

Esercizio 3. Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov su E, con funzione di transizione P. Se $C \subset E$ è una classe chiusa (non vuota), definiamo P^C la restrizione di P su C:

$$P^C = (P^C_{ij})_{i,j \in C}, \quad P^C_{ij} = P_{ij} \quad i, j \in C.$$

a) Mostrare P^C è una funzione di transizione su C e che quindi è possibile costruire una "sottocatena" di quella data con spazio degli stati C.

Per i prossimi punti, supponiamo che E sia finito.

b) Mostrare che esiste almeno una distribuzione invariante ν per la sottocatena di matrice di transizione P^C e che questa identifica una distribuzione invariante π^C per tutta la catena tramite l'uguaglianza $\pi^C_i = \nu_i$ se $i \in C$ e $\pi^C_i = 0$ se $i \notin C$ (e quindi, π^C dà "massa totale" agli stati di C).

c) Supponiamo che esistano due classi chiuse C_1 e C_2 disgiunte. Siano π^{C_1} e π^{C_2} le distribuzioni invarianti come nel punto **b)**. Mostrare che una qualsiasi combinazione lineare convessa di π^{C_1} e π^{C_2} è ancora una distribuzione invariante. Dedurre che in tal caso esistono infinite distribuzioni invarianti.

d) Dedurre che se esiste una sola distribuzione invariante allora esiste un'unica classe irriducibile.

[Oss: dati due punti x, y di uno spazio vettoriale, una *combinazione lineare convessa* di x e y è un punto del tipo $\alpha x + (1 - \alpha)y$, dove $\alpha \in [0, 1]$.]

Esercizio 4. Consideriamo una catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ con probabilità di transizione date da:

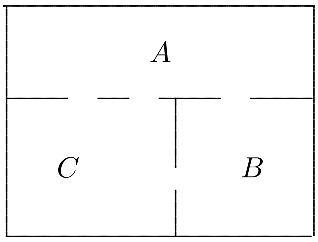
- se $i = 2, 3, 4$ allora $p_{i,i} = 1 - p$, $p_{i,i-1} = p$, dove $0 < p < 1$;
- dallo stato $i = 1$ la catena si sposta in uno degli stati $i = 2, 3, 4$ scelto con probabilità uniforme.

a) Indicare quali sono gli stati transitori e quali i ricorrenti.

b) La catena è irriducibile?

c) Determinare tutte le probabilità invarianti della catena.

Esercizio 5. Un topolino vive in un ambiente formato da tre stanze, A, B, C come nella figura. Ad ogni iterazione egli si sposta dalla stanza in cui si trova in una delle altre stanze scegliendo a caso una delle aperture.



a) Costruire una catena di Markov $\{X_n\}_n$ che descriva la dinamica del topolino.

b) Se inizialmente il topolino si trova nella stanza A qual è la probabilità che sia ancora in A dopo due iterazioni? E dopo tre?

c) Al tempo iniziale, il topolino si trova nella stanza A, B oppure C con probabilità, rispettivamente, π_A, π_B oppure π_C, con $\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$. È possibile trovare π_A, π_B e π_C affinché in ogni istante continui a trovarsi nella stanza A, B e C con probabilità ancora π_A, π_B e π_C rispettivamente? In caso affermativo, calcolare tali probabilità.

d) Qual è la probabilità che dopo n iterazioni esso si trovi nella stanza C, per n grande? Qual è la stanza in cui è meno probabile che si trovi dopo n iterazioni, sempre per n grande?

e) Quanto tempo occorre, in media, perché il topolino raggiunga la stanza C se al tempo iniziale si trova in A?

Esercizio 6. Dati $\mu_i > 0$, $i \in E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\sum_{i=1}^4 \mu_i = 1$, si consideri la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0. \end{pmatrix}$$

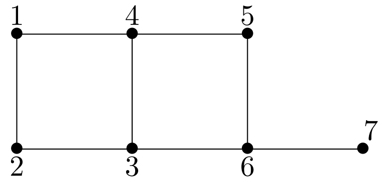
Sia ν una distribuzione su E e $(X_n)_n$ la CM con matrice di transizione a P e legge iniziale ν.

a) Classificare gli stati della catena.

b) Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, $i, j \in E$.

c) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big((X_n - 2)^2\big)$.

Esercizio 7. Un topolino si sposta sui vertici di un grafo come nella Figura.



Ad ogni istante, il topolino si sposta dal vertice in cui si trova ad uno di quelli adiacenti, scelto ogni volta a caso e con probabilità uniforme.

a) Giustificare l'uso di una catena di Markov per modellizzare questa situazione e scrivere la matrice di transizione.

b) Si tratta di una catena irriducibile? Regolare? Quali sono le distribuzioni stazionarie di questa catena?

c) Supponiamo che in 7 ci sia un pezzo di formaggio e che in 1 e in 4 siano state messe delle trappole. Qual è la probabilità che il topolino riesca a mangiare il formaggio se inizialmente si trova nel vertice 2?

Esercizio 8. Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Classificare gli stati della catena e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.

b) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^2(X_n)$ ($\mathbb{E}^2$= media quando al tempo iniziale la catena si trova nello stato 2).

c) Calcolare il tempo medio di raggiungimento dello stato 3 quanto la catena parte dallo stato 2.

Esercizio 9. Consideriamo la catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ associata alla matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

dove $0 \leq \alpha \leq 1$.

a) Discutere le proprietà di irriducibilità e di regolarità della catena al variare di $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) Determinare le distribuzioni stazionarie della catena.

c) Calcolare, al variare di $0 < \alpha < 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^1(\log X_n)$.

d) In media quanto tempo occorre per passare dallo stato 4 allo stato 1?

Esercizio 10. Consideriamo la catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ associata alla matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

a) Classificare gli stati della catena e discutere le proprietà di irriducibilità e/o di regolarità.

b) Determinare le distribuzioni invarianti.

c) Supponiamo che la legge iniziale ν sia tale che $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Per ogni $i \in E$, calcolare $\mathbb{P}(X_n = i)$ per n grande.

d) Calcolare la probabilità di raggiungere la classe $C = \{3, 4, 5\}$ partendo dallo stato 1 oppure 2. Se invece si prende $C = \{4, 5\}$, come cambiano queste probabilità?

Esercizio 11. Al Luna Park, Luca e Sara si sfidano al tiro a segno, tirando una volta per ciascuno. Vince chi per primo colpisce il bersaglio. È noto che Sara colpisce il bersaglio con probabilità 1/2 e sia α, con $0 < \alpha < 1$, la probabilità con la quale Luca tira a segno. Viene usata le seguente regola iniziale:

1. Luca comincia il gioco;
2. Sara comincia il gioco;
3. il primo giocatore viene scelto per sorteggio casuale.

a) Descrivere la dinamica del gioco tramite una catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena e dire quali sono le classi chiuse e le classi irriducibili.

c) Verificare che il gioco prima o poi finisce, qualunque sia la regola iniziale.

d) Calcolare la probabilità che vinca Sara e la probabilità che vinca Luca, al variare di $\alpha \in (0, 1)$, nei casi 1., 2. e 3.

e) Determinare α, qualora sia possibile, affinché Sara e Luca abbiano la stessa probabilità di vincere, per ciascuna regola iniziale 1., 2. e 3.

f) Calcolare quanto tempo in media dura il gioco con le regole iniziali 1. e 2.