Tutorato VIII
Probabilità e Statistica
a.a. 2022/2023

Argomenti: leggi gaussiane multivariate

Esercizio 1. Sia $X = (X_1, \dots, X_d)$ una v.a. su $\mathbb{R}^d$ di legge $\mathrm{N}(\mu, C)$, con $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \mathrm{Mat}(d \times d)$ simmetrica e semidefinita positiva. Dunque,

$$\varphi_X(\theta) = e^{i\langle \theta, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\theta, \theta\rangle}, \quad \theta \in \mathbb{R}^d.$$

a) Dimostrare che ciascuna componente X_k del vettore X ha legge gaussiana su $\mathbb{R}$, di media e varianza da precisare.

b) Dimostrare che se C è una matrice diagonale allora le coordinate $X_1, \dots, X_d$ sono v.a. indipendenti.

c) Dimostrare il seguente risultato più generale.

Supponiamo che C sia una matrice a blocchi del tipo (la notazione * denota la trasposizione)

$$C = \begin{pmatrix} \bar{C} & O \\ O^* & \hat{C} \end{pmatrix}$$

con $\bar{C} \in \mathrm{Mat}(k \times k)$, $\hat{C} \in \mathrm{Mat}((d-k) \times (d-k))$, $O \in \mathrm{Mat}(k \times (d-k))$, dove $1 \le k < d$ e O è una matrice nulla. Provare che i sottovettori aleatori $\bar{X} = (X_1, \dots, X_k)$ e $\hat{X} = (X_{k+1}, \dots, X_d)$ sono indipendenti e gaussiani rispettivamente su $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{d-k}$.

[Sugg.: basta far vedere che la f.c. della coppia $(\bar{X}, \hat{X})$ si fattorizza nel prodotto delle f.c.: $\varphi_{\bar{X},\hat{X}}(\bar{\theta}, \hat{\theta}) = \varphi_{\bar{X}}(\bar{\theta})\varphi_{\hat{X}}(\hat{\theta})$, per ogni $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^k$ e $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{d-k}$.]

Esercizio 2. In questo esercizio ci proponiamo di dimostrare il seguente risultato di algebra lineare:

Proposizione 1. *Sia* $\odot : \mathrm{Mat}(n \times n) \times \mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ *il prodotto tra matrici definito da*

$$(A \odot B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n).$$

Dimostrare che se A e B sono simmetriche e semidefinite positive allora $A \odot B$ è simmetrica e semidefinita positiva.

Useremo una tecnica probabilistica. Per tale motivo, siano $\bar{C}, \hat{C} \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ matrici simmetriche e semidefinite positive e sia $C \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n)$ definita da

$$C = \begin{pmatrix} \bar{C} & O \\ O & \hat{C} \end{pmatrix}$$

dove $O \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ denota la matrice nulla.

a) Dimostrare che C è simmetrica e semidefinita positiva.

Sia X una v.a. su $\mathbb{R}^{2n}$ tale che $X \sim \mathrm{N}(0, C)$. Definiamo $\bar{X}$ il vettore delle prime n componenti di X e $\hat{X}$ il vettore delle rimanenti componenti, cioè

$$\bar{X}_i = X_i \quad \text{e} \quad \hat{X}_i = X_{n+i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definiamo ora $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ la v.a. a valori in $\mathbb{R}^n$ data da

$$Y_i = \bar{X}_i\hat{X}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

b) Dimostrare che per ogni $i, j = 1, \dots, n$ si ha

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \bar{C}_{ij} \hat{C}_{ij}.$$

Sulla base dei punti **a)** e **b)**, dimostrare la Proposizione 1.

Esercizio 3. Siano X e Z due v.a. reali indipendenti tali che $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ e $\mathbb{P}(Z = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(Z = -1)$. Definiamo $Y = ZX$.

a) Scrivere la funzione caratteristica di Y e dedurre che $Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

b) Scrivere la funzione caratteristica di (X, Y) e dedurre che X e Y non sono indipendenti.

c) Verificare che $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

d) È possibile che la coppia (X, Y) abbia legge gaussiana su $\mathbb{R}^2$?

[Sugg: dovendo calcolare $\mathbb{E}(f(X, Z))$, con f opportuna, si potrebbe usare la seguente relazione: $f(X, Z) = f(X, Z)\mathbb{1}_{Z=1} + f(X, Z)\mathbb{1}_{Z=-1} = f(X, 1)\mathbb{1}_{Z=1} + f(X, -1)\mathbb{1}_{Z=-1}$ ed essendo $X \perp\!\!\!\perp Z$, si ha $\mathbb{E}(f(X, Z)) = \mathbb{E}(f(X, 1)\mathbb{1}_{Z=1}) + \mathbb{E}(f(X, -1)\mathbb{1}_{Z=-1}) = \mathbb{E}(f(X, 1))\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{E}(f(X, -1))\mathbb{P}(Z = -1)$.]

Esercizio 4. Sia $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ una v.a. su $\mathbb{R}^d$ di legge $\mathrm{N}(\mu, C)$, con $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \mathrm{Mat}(d \times d)$ simmetrica e semidefinita positiva.

a) Per $m \in \mathbb{R}^k$ e $A \in \mathrm{Mat}(k \times d)$, sia $W = m + AZ$. Dimostrare che W è ancora gaussiana e precisare i parametri che caratterizzano la legge. Dedurre poi che per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, la v.a. $\lambda_1 Z_1 + \cdots + \lambda_d Z_d$ è gaussiana, di parametri da determinare.

b) Siano X e Y due v.a. su $\mathbb{R}$ congiuntamente gaussiane, centrate e tali che $\mathbb{E}(X^2) = 4$, $\mathbb{E}(Y^2) = 1$ e $2X + Y \perp\!\!\!\perp X - 3Y$.

b1) Scrivere la matrice di covarianza di (X, Y).

b2) Calcolare la legge di $(X + Y, 2X - Y)$.