Tutorato VII
Probabilità e Statistica
a.a. 2022/2023

Argomenti: uso del TCV per il calcolo di densità; media, varianza, covarianza e matrice di covarianza di v.a. assolutamente continue; legge gaussiana su $\mathbb{R}$; funzioni caratteristiche.

Esercizio 1. Sia (X, Y) una v.a. in $\mathbb{R}^2$ con densità continua

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{x^3 y^2} \mathbb{1}_{x>1,y>x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(Y < 2X)$.

b) Calcolare la densità congiunta di $U = \log X$ e $V = X/Y$ e le relative densità marginali.

Esercizio 2. Si chiama legge di Laplace di parametro $\lambda > 0$ quella individuata dalla densità

$$p(x) = c\,\mathrm{e}^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Calcolare c. Dire se X ha momento di ordine k, con $k \geq 1$. E qualora esistano, calcolare media e varianza di X.

b) Calcolare la densità di $Z = \alpha X$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si tratta di una legge nota?

c) Calcolare la legge di $W = |X|$. Si tratta di una legge nota? Esistono media e varianza? Se sì, quanto valgono?

Esercizio 3. Fissato $\mu \in \mathbb{R}$, sia

$$p(x) = c\, x^{\mu} \mathbb{1}_{x\in(0,1)}. \tag{1}$$

a) Determinare μ e c affinché p sia una densità di probabilità su $\mathbb{R}$.

Nel seguito, indicheremo con X una v.a. con densità (1), con μ e c appena determinate.

b) Dire per quali valori di μ esiste la media di X e calcolarla.

c) Siano X e Y due v.a. indipendenti, X con densità data da (1) con $\mu = 1$ (verificare che $\mu = 1$ dà effettivamente una densità!) e $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$. Calcolare la densità della v.a. $X + Y$.

Esercizio 4. Una v.a. X su $\mathbb{R}$ è detta "di Cauchy" se ha densità

$$p(x) = \frac{c}{1 + x^2}$$

a) Mostrare che $c = 1/\pi$ e scrivere esplicitamente la funzione di distribuzione associata.

b) Dire se X ha valor medio. X ha varianza?

c) Calcolare la legge di $Y = X^2$. Y ha media? Ha varianza?

d) Dopo aver verificato che la v.a. $Z = 1/X$ è ben posta, calcolare la legge di Z. Z ha media? Ha varianza?

Esercizio 5. Siano X e Y v.a. indipendenti tali che $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Exp}(\mu)$. Calcolare la densità e la f.r. di:

a) $Z = X + Y$;

b) $W = \alpha X$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si tratta di leggi note?

Esercizio 6. Sia X una v.a. con densità $\Gamma(\alpha, \lambda)$, ovvero

$$p_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} 1\!\!1_{(0,+\infty)}(x), \quad \alpha, \lambda > 0.$$

a) Esistono i momenti di $Y = 1/X$? Se sì, fino a quale ordine?

b) Calcolare, se possibile, la media di Y.

c) Calcolare, se possibile, $\text{Cov}(X, Y)$. Che tipo di dipendenza c'è tra X e Y?

Esercizio 7. Siano X ed Y due v.a. indipendenti $X \sim \text{Un}(0, 1)$ e $Y \sim \text{Exp}(1)$.

a) Posto $U = X$ e $V = X - Y$, calcolare la densità congiunta di (U, V).

b) Usando **a)**, calcolare la densità di $X - Y$.

c) Usando **b)**, calcolare $\mathbb{P}(X > Y)$.

Esercizio 8. Siano X e Y due v.a. con densità congiunta

$$p(x, y) = c\sqrt{x^2 + y^2}\, 1\!\!1_{x^2+y^2 \leq 1}$$

a) Calcolare c e la densità congiunta di $U = X$ e $V = Y/X$. U e V sono indipendenti?

b) Sia R la distanza di (X, Y) dall'origine. Calcolare, se esistono, $\mathbb{E}(R)$ e $\text{Var}(R)$.

c) Per $n \geq 1$, sia R_n la distanza di (X_n, Y_n) dall'origine, con (X_n, Y_n) copie indipendenti di (X, Y). Posto $D_n = \min(R_1, \ldots, R_n)$, $n \geq 1$, dimostrare che per ogni $\delta > 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n > \delta) = 0$.

Esercizio 9. Sia $X \sim \text{N}(10, 36)$. Facendo uso delle tavole, calcolare:

a) $\mathbb{P}(X > 4)$;

b) $\mathbb{P}(4 < X \leq 16)$;

c) $\mathbb{P}(X \leq 22)$;

d) il valore di c per cui $\mathbb{P}(X > c) = 0.10$;

e) il valore di c per cui $\mathbb{P}(|X - 10| > c) = 0.10$.

Esercizio 10. Presa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, siano $\bar{\varphi}$ la funzione coniugata e $|\varphi|^2$ la funzione modulo (complesso) al quadrato.
Dimostrare che se $\varphi(t)$ è una funzione caratteristica allora anche $\bar{\varphi}(t)$, $\varphi^2(t)$ e $|\varphi|^2(t)$ sono funzioni caratteristiche. Equivalentemente: se $\varphi(t)$ denota la funzione caratteristica di una v.a. X, cioè $\varphi_X(t) = \varphi(t)$, esibire tre v.a. Y, Z e W con funzione caratteristica data da $\varphi_Y(t) = \bar{\varphi}(t)$, $\varphi_Z(t) = \varphi^2(t)$ e $\varphi_W(t) = |\varphi|^2(t)$ rispettivamente.

Esercizio 11. Sia $\varphi(t)$ la funzione caratteristica di una v.a. X su $\mathbb{R}$ dotata di momento secondo. Dimostrare che si ha sempre $\varphi'(0)^2 \geq \varphi''(0)$.

[Sugg.: ricordare il legame tra funzioni caratteristiche e momenti...]

Esercizio 12. Sia (X, Y) un vettore aleatorio su $\mathbb{R}^2$ con densità continua

$$f_{X,Y}(x, y) = ce^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y>x>0}.$$

a) Calcolare c e, se esiste, $\mathbb{E}(XY)$.

b) Calcolare la funzione caratteristica $\varphi_{X,Y}$ di (X, Y).

c) Usando la funzione caratteristica $\varphi_{X,Y}$, calcolare $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

[Sugg.: ricordare il legame tra funzioni caratteristiche e momenti...]

d) Calcolare la funzione caratteristica $\varphi_{U,V}$ di $U = X$ e $V = Y - X$. U e V sono indipendenti?

[Si ricorda che, per Z v.a. in $\mathbb{R}^d$, A matrice $n \times d$ e $b \in \mathbb{R}^n$, si ha $\varphi_{AZ+b}(\theta) = e^{i\langle\theta,b\rangle}\varphi_Z(A^T\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^n$.]

e) Calcolare la densità congiunta di $U = X$ e $V = Y - X$ usando dapprima il punto **d)** e poi usando il TCV.