Tutorato VI
Probabilità e Statistica
a.a. 2022/2023

Argomenti: v.a. assolutamente continue; densità congiunte e marginali; indipendenza; calcoli con densità.

Esercizio 1. Dire se esiste un valore della costante c affinché le funzioni f_1, f_2 e f_3, definite da

$$f_1(x) = c(1-x^2)\mathbb{1}_{\{x\in(-1,1)\}}, \quad f_2(x) = c(1-x^2)\mathbb{1}_{\{x\in(-2,2)\}}, \quad f_3(x) = c(1-x^2)\mathbb{1}_{\{x\in(2,3)\}},$$

siano densità di probabilità.

Esercizio 2. Fissato $\mu \in \mathbb{R}$, sia

$$p(x) = c\, x^{\mu}\mathbb{1}_{x\in(0,1)}. \tag{1}$$

a) Determinare μ affinché p sia integrabile su $\mathbb{R}$.

b) Per tali valori di μ, trovare c affinchè p sia una densità di probabilità.

c) Sia X una v.a. con densità data da (1) con $\mu = 1$ (verificare che $\mu = 1$ dà effettivamente una densità!). Calcolare la densità della v.a. $X^2 + 1$.

Esercizio 3. Sia X una v.a. continua tale che $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$. Supponiamo che X verifica la proprietà di assenza di memoria:

$$\mathbb{P}(X > x + y \mid X > y) = \mathbb{P}(X > x), \quad \text{per ogni } x, y \geq 0. \tag{2}$$

Abbiamo visto a lezione che se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ allora (2) è soddisfatta. In questo esercizio dimostreremo il viceversa: un v.a. *continua* che soddisfa (2) ha legge esponenziale.

a) Dimostrare che (2) equivale alla seguente proprietà:

$$\mathbb{P}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(X > y), \quad \text{per ogni } x, y \geq 0. \tag{3}$$

b) Dimostrare che se (3) è vera allora:

b1) per ogni $x_1, x_2, x_3 > 0$ si ha $\mathbb{P}(X > x_1+x_2+x_3) = \mathbb{P}(X > x_1)\mathbb{P}(X > x_2)\mathbb{P}(X > x_3)$ e, più in generale,

$$\mathbb{P}(X > x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \mathbb{P}(X > x_1)\mathbb{P}(X > x_2)\cdots\mathbb{P}(X > x_n),$$

per ogni $n \geq 2$ e $x_1, \ldots, x_n > 0$;

b2) per ogni $b \in \mathbb{N}$, con $b \neq 0$, si ha

$$\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X > 1/b)^b,$$

da cui segue che $\mathbb{P}(X > 1/b) = \mathbb{P}(X > 1)^{1/b}$;

b3) per ogni $a, b \in \mathbb{N}$, con $b \neq 0$, si ha

$$\mathbb{P}(X > a/b) = \mathbb{P}(X > 1)^{a/b}.$$

b3) per ogni $x \in \mathbb{Q}$ con $x \geq 0$ si ha $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X > 1)^x$ e che, necessariamente, $\mathbb{P}(X > 1) \in (0, 1)$.

c) Dimostrare che, posto $\lambda = -\ln \mathbb{P}(X > 1)$, si ha

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad \text{per ogni } x \geq 0.$$

Dedurre che dev'essere $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Esercizio 4. Una v.a. di Weibull di parametri $\alpha, \lambda > 0$ è una v.a. assolutamente continua T con densità

$$p(t) = \alpha\, \lambda\, t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}\, 1\!\!1_{t>0}.$$

a) Le v.a. di Weibull vengono utilizzate per descrivere *tempi di vita (aleatori)*, ad esempio di apparecchiature, o di popolazioni biologiche. Giustificare tale interpretazione.

b) Fissato $u \in \mathbb{R}$, calcolare esplicitamente $\mathbb{P}(T > u)$ e quindi la funzione di distribuzione F_T di T.

c) Fissato $t > 0$, scrivere esplicitamente la funzione $g_t(\cdot)$ definita come

$$[0, +\infty) \ni s \mapsto g_t(s) = \mathbb{P}(T > t + s \,|\, T > s) = \mathbb{P}(T - s > t \,|\, T > s) \in [0, 1].$$

Determinare inoltre α e λ affinché la funzione $s \mapsto g_t(s)$ sia monotona o costante.

d) Fissato $t > 0$, $\mathbb{P}(T - s > t \,|\, T > s)$ è la probabilità che l'unità cui T si riferisce rimanga in vita per un ulteriore tempo t noto che all'istante s è funzionante (se è noto che $T > s$, la v.a. $T - s$ viene usualmente interpretata come il *tempo di vita residuo*). Se T denota il tempo di vita (aleatorio) di una certa apparecchiatura, quali valori scegliereste per α e λ se tale apparecchiatura fosse soggetta ad usura? E se T si riferisse a qualcosa che tende a migliorare con l'età? E infine, se T è il tempo di vita di una unità che non tende né a migliorare né a peggiorare con il passare del tempo (o anche: se valesse il concetto di "perdita di memoria"), quali sarebbero i valori più opportuni per α e λ?

Esercizio 5. Sia $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ e sia $\alpha > 0$. Verificare che la v.a. $X = T^{1/\alpha}$ è ben posta e calcolarne la legge. Si tratta di una legge nota?

Esercizio 6. Una v.a. X è detta "di Cauchy" se ha densità

$$p(x) = \frac{1}{\pi\,(1 + x^2)}$$

a) Verificare che p è una densità di probabilità e scrivere esplicitamente la funzione di ripartizione.

b) Calcolare la legge di $Y = X^2$.

c) Dopo aver verificato che la v.a. $Z = 1/X$ è ben posta, calcolare la legge di Z.

Esercizio 7. Siano $X_1, \ldots, X_n$ n v.a. indipendenti con densità $f_1, \ldots, f_n$ e funzione di distribuzione $F_1, \ldots, F_n$. Calcolare la densità di

$$U = \max(X_1, \ldots, X_n) \qquad W = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

Specializzare al caso in cui $f_1 = \ldots = f_n = f$ e quindi $F_1 = \ldots = F_n = F$.

Esercizio 8. **a)** Sia X una v.a. con funzione di ripartizione F_X. Si supponga l'esistenza di due numeri reali a, b, con $-\infty \le a < b \le +\infty$, tali che:

i) se $a > -\infty$ allora $F_X(x) = 0$, per ogni $x \le a$; se $b < +\infty$ allora $F_X(x) = 1$, per ogni $x \ge b$;

ii) esiste una funzione $G : (0,1) \to (a,b)$ tale che

$$F_X \circ G(y) = y, \text{ per ogni } y \in (0,1) \quad \text{e} \quad G \circ F_X(x) = x, \text{ per ogni } x \in (a,b)$$

(cioè F_X è invertibile su (a,b)).

Sia $Z \sim \mathrm{Un}(0,1)$ e $Y = G(Z)$. Dimostrare che $F_Y(\xi) = F_X(\xi)$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. Inoltre, se X ha densità di probabilità f_X dimostrare che anche Y ha densità $f_Y(\xi) = f_X(\xi)$.

b) Tenendo conto che esistono numerosi (e buoni) generatori aleatori in grado di simulare al calcolatore v.a. uniformi su $(0,1)$, il risultato in **a)** può essere usato nella pratica per simulare una v.a. X con funzione di distribuzione F_X che verifica le proprietà *i)* e *ii)* (nel caso in cui l'inversa si può scrivere in modo esplicito): come? Ad esempio, se $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, come fareste per simulare X?

Esercizio 9. Sia $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Calcolare la legge di[1] $Y = \lfloor X \rfloor$. Si tratta di una legge nota? [Sugg.: per $x \ge 0$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$, quindi Y è una v.a. discreta...]

Esercizio 10. Un componente elettronico ha un tempo di vita S_1 che segue una legge $\mathrm{Exp}(1/10)$. Un secondo componente è composto da due elementi, indipendenti tra loro e con il primo componente, posti in parallelo, con tempi di vita che seguono una legge $\mathrm{Exp}(1/8)$.

a) Qual è la densità del tempo di vita S_2 del secondo componente?

b) Qual è la probabilità che il primo componente duri più a lungo del secondo?

Esercizio 11. Sia (X,Y) un vettore aleatorio su $\mathbb{R}^2$ con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{c}{1+x^2+y^2}\, 1\!\!1_D(x,y),$$

dove $c \in \mathbb{R}$ e D è il disco unitario: $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$.

a) Calcolare c.

b) Calcolare le densità marginali. Le v.a. X e Y sono indipendenti?

c) Fissato $r > 0$, calcolare la probabilità che il punto (X,Y) disti dall'origine per più di r.

d) Usando **c)**, calcolare la densità di probabilità della distanza di (X,Y) dall'origine.

[1] Ricordiamo che per $x \ge 0$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ e per $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x \rfloor = n$ se e solo se $x \in [n, n+1)$.