Tutorato III
Probabilità e Statistica
a.a. 2022/2023

Argomenti: leggi congiunte e marginali; leggi condizionali; v.a. indipendenti; calcolo di leggi; funzioni e somme di v.a.

Esercizio 1. Due giocatori (Tizio e Caio) ed il banco (Sempronio) lanciano un dado ciascuno. Un giocatore vince se ottiene un risultato non inferiore a quello dell'altro giocatore e superiore al risultato del banco, altrimenti vince il banco.

a) Posto $X =$ risultato di Tizio, $Y =$ risultato di Caio, $Z =$ risultato di Sempronio, scrivere la densità congiunta $p_{X,Y,Z}(x, y, z)$ di X, Y e Z. Calcolare di conseguenza le relative marginali a due a due ($p_{X,Y}$, $p_{X,Z}$ e $p_{Y,Z}$) e le marginali singole (p_X, p_Y e p_Z).

b) Scrivere, in termini della densità congiunta $p_{X,Y,Z}(x, y, z)$, la probabilità che vinca un giocatore (Tizio, oppure Caio). Calcolare poi esplicitamente tale probabilità.

c) Dire se gli eventi $\{$vince Tizio$\}$ e $\{$vince Caio$\}$ sono indipendenti.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.]

Esercizio 2. Un'urna, che indicheremo con U, contiene 2 palline bianche e 1 pallina rossa. Da U vengono effettuate n estrazioni con reinserimento. Sia N il numero totale di palline bianche estratte. Una seconda urna, urna V, viene riempita con N palline bianche e $n - N$ palline rosse.

(a) Calcolare la distribuzione di N.

(b) Dall'urna V viene estratta una pallina: calcolare la probabilità che sia bianca (si interpreti il risultato!).

(c) Calcolare per quali valori di n la probabilità di aver estratto dall'urna U una sola pallina bianca, noto il risultato di cui al punto precedente, sia più grande di $1/2$.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$.]

Esercizio 3. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x \text{ e } x, y = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Verificare che effettivamente p_{XY} è una densità discreta su $\mathbb{R}^2$.

b) Si ha: $\mathbb{P}(Y < X) = 0$. Giustificare questa affermazione senza fare conti (niente foglio e penna!), guardando solo alla densità congiunta.

c) Scrivere le distribuzioni marginali. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note? X e Y sono indipendenti?

d) Scrivere le distribuzioni condizionali di X dato $Y = y$ e di Y dato $X = x$, per y e x in un insieme da specificare. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note?

Esercizio 4. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)!} e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \dots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(|Y| = X)$.

b) Scrivere le distribuzioni marginali. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note?

Esercizio 5. Siano X e Y due v.a. discrete, a valori in $E_X = \{-1, 0, +1\}$ e $E_Y = \{-1, +1\}$ rispettivamente, con densità discreta congiunta p_{XY} descritta dalla seguente tabella:

	$X = -1$	$X = 0$	$X = +1$	
$Y = -1$	$1/4$	$1/8$	α	
$Y = +1$	$1/8$	$1/8$	$1/4$	

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare α e scrivere le densità discrete marginali p_X e p_Y.

(b) Scrivere le densità marginali e dire se X e Y sono indipendenti.

Esercizio 6. Siano X e Y v.a. con densità discreta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} c \cdot (1-p)^{|x|-1} p & \text{se } x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ e } y = \operatorname{sgn}(x) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ e la funzione sgn, detta "funzione segno", è definita da: $\operatorname{sgn}(\xi) = +1$ se $\xi > 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$ e $\operatorname{sgn}(\xi) = -1$ se $\xi < 0$.

a) Si ha: $\mathbb{P}(Y = \sqrt{2}) = 0$, $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ e $\mathbb{P}(X > 0 \mid Y = -1) = 0$. Giustificare queste affermazioni senza fare conti (niente foglio e penna!), guardando solo alla densità congiunta.

b) Mostrare che dev'essere $c = 1/2$.

c) Scrivere le densità marginali di X e di Y. Le v.a. X e Y sono indipendenti?

d) Scrivere le densità condizionali di X dato $Y = y$ e di Y dato $X = x$. Verificare formalmente che $\mathbb{P}(X > 0 \mid Y = -1) = 0$.

Esercizio 7. Siano X e Y due v.a. discrete a valori in E_X e E_Y rispettivamente, con densità congiunta discreta p_{XY} data da: $p_{XY}(x, y) = g_1(x) g_2(y)$, $x \in E_X$ e $y \in E_Y$, dove $g_1, g_2 \geq 0$. Siano p_X e p_Y le rispettive densità marginali. Dimostrare che

a) posto $c_1 = \sum_{x \in E_X} g_1(x)$ e $c_2 = \sum_{y \in E_Y} g_2(y)$, si ha $0 < c_1, c_2 < +\infty$;

b) $c_1 \cdot c_2 = 1$;

c) $p_X(x) = c_1^{-1} g_1(x)$ e $p_Y(y) = c_2^{-1} g_2(y)$.

Dedurre il seguente risultato:

d) *Due v.a. discrete X e Y sono indipendenti se e solo se esistono due funzioni g_1 e g_2 tali che la densità congiunta di X e Y si può scrivere $p_{XY}(x,y) = g_1(x)g_2(y)$.*

Esercizio 8. Siano X e Y v.a. indipendenti t.c.

$$X = \begin{cases} -1 & \text{con probabilità } \frac{1}{4} \\ 0 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{con probabilità } \frac{1}{8} \\ 2 & \text{con probabilità } \frac{1}{8} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{con probabilità } \frac{1}{3} \\ 0 & \text{con probabilità } \frac{2}{3} \end{cases}$$

a) Disegnare la funzione di ripartizione di X e di Y.

b) Posto $Z = X^2$, dire quali valori può assumere Z. Calcolare la densità discreta di Z e disegnare la relativa funzione di ripartizione.

c) Posto $W = Z + Y$, dire quali valori può assumere W. Calcolare la densità discreta di W e disegnare la relativa funzione di ripartizione.

Esercizio 9. In una sequenza di prove bernoulliane $X_1, X_2, \ldots$ con $p =$ probabilità di successo, siano T e U rispettivamente il primo e il secondo istante in cui si osserva il successo:

$$T = \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = 1\} \qquad U = \inf\{n \geq T+1 \,:\, X_n = 1\}$$

a) Calcolare la distribuzione congiunta di T e U e le relative distribuzioni marginali.

b) Posto $V = U - T$, calcolare la distribuzione congiunta di T e V e dire se sono indipendenti.

d) Fissato $k \geq 1$, calcolare $\mathbb{P}(U > T + k)$ e dire per quali valori di k tale probabilità è minore di 0.1.

Esercizio 10. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x, \text{ con } x, y = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare la distribuzione condizionale di Y dato che $X = x$, per x appartenente ad un insieme opportuno che si chiede di specificare.

b) Calcolare la distribuzione congiunta di $Z = X + 1$ e $W = Y - X$. Z e W sono indipendenti?

Esercizio 11. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \ldots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Verificare che la v.a. $W = Y/X$ è ben posta e calcolarne la legge.

b) Calcolare la legge di $X + Y$.

Esercizio 12. Siano X, Y, Z tre v.a. indipendenti, con legge geometrica di parametro $p \in (0,1)$. Calcolare $\mathbb{P}(X = Y)$ e $\mathbb{P}(X \geq 2Y)$.