

**Argomenti:** v.a. discrete; leggi legate agli schemi successo-insuccesso: bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, geometrica, legge di Poisson; funzioni di ripartizione.

**Esercizio 1.** Una fabbrica produce monete, provenienti da due linee di produzione diverse A e B. Le monete sono per lo più eque, tranne il 10% di quelle prodotte dalla linea A, che danno a testa una probabilità di uscita pari a  $1/8$ , ed il 20% delle monete che escono da B, che danno testa con probabilità  $1/4$ .

- a) Qual è la probabilità che una moneta scelta a caso sia difettosa?
- b) Qual è la probabilità che una moneta scelta a caso dia testa?
- c) Le monete vengono preparate in confezioni da 10 pezzi, tutte provenienti dalla stessa linea. Si osserva che una sola moneta di una confezione scelta a caso è difettosa. È più probabile che si tratti di una confezione contenente monete provenienti dalla linea A o dalla linea B?

**Esercizio 2.** Si sa che in una schedina del totocalcio i tre simboli 1, X, 2 compaiono con probabilità 0.46, 0.28 e 0.26 rispettivamente. Supponiamo inoltre che una colonna del totocalcio riguardi 13 partite, com'era fino a poco tempo fa. Calcolare la probabilità che nella schedina di domenica

- a) il 2 compaia più ( $\geq$ ) di 4 volte;
- b) il simbolo X non compaia mai;
- c) il 2 e lo X insieme compaiano più ( $\geq$ ) di 12 volte.

**Esercizio 3.** Una scatola contiene 10 monete: 8 di queste sono equilibrate, mentre le altre 2 danno testa con probabilità  $2/3$ . Una moneta viene scelta a caso e lanciata tre volte.

- a) Qual è la probabilità che si abbiano tre teste? E due teste e una croce?
- b) Sapendo che sono uscite tre teste, è più probabile che la moneta scelta sia equilibrata oppure no?
- c) Sempre sapendo che sono uscite tre teste, qual è la probabilità che anche un quarto lancio (della stessa moneta) dia testa?
- d) Indichiamo con  $X_1$  il risultato del primo lancio e con  $X_2$  il risultato del secondo. Quanto vale  $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$ ? Gli eventi  $\{X_1 = 1\}$  e  $\{X_2 = 1\}$  sono indipendenti?

**Esercizio 4.** Due urne, A e B, contengono 100 monete. In particolare: A contiene 10 monete difettose e 90 eque; B contiene 20 monete difettose e 80 eque. 10 monete vengono estratte senza reinserimento da una delle due urne. Qual è la probabilità che ve ne sia almeno una difettosa sapendo che:

- (a) l'urna scelta è la A;

(b) l'urna scelta è la B;

(c) l'urna è scelta a caso tra A e B.

**Esercizio 5.** Una stampante è collegata ad una rete che permette l'accesso ad un massimo di 20 richieste di stampa. A questa rete sono collegati 24 operatori, ognuno dei quali, in un certo istante, invia una stampa con probabilità  $3/5$ . Con quale probabilità la stampante è, in un dato istante, satura (cioè, non è in grado di soddisfare tutte le richieste di stampa inviate)?

**Esercizio 6.** Fissati  $\rho \in (0, 1)$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , siano

$$p_1(x) = \begin{cases} c_1 \rho^{2x} & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e} \quad p_2(x) = \begin{cases} c_2 \rho^{2x} & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire se è possibile scegliere  $c_1$  e  $c_2$  affinché  $p_1$  e  $p_2$  siano due densità discrete. E in caso affermativo, si tratta di leggi note?

**Esercizio 7.** Fissati  $n$  intero,  $n \geq 1$ , e  $c \in \mathbb{R}$ , sia

$$p(x) = \begin{cases} cx & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire se è possibile scegliere  $c$  affinché  $p$  sia una densità discrete.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .]

**Esercizio 8.** Come l'Esercizio 7 con

$$p(x) = \begin{cases} cx\rho^x & x = 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $\rho \in (0, 1)$  è fissato.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che  $\sum_{k=0}^n \rho^k = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$ .]

**Esercizio 9.** Come l'Esercizio 7 con

$$p(x) = \begin{cases} cx\rho^x & x = -1, 0, +1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $\rho \in (0, 1)$  è fissato.

**Esercizio 10.** All'inizio di ogni mese un commerciante ordina un certo prodotto per le vendite di tutto il mese. Egli può plausibilmente supporre che il numero di unità di quel prodotto richieste in un mese segua una legge di Poisson, di parametro  $\lambda = 4$ . Qual è il numero minimo di unità che deve ordinare perché al 90% non resti senza quel prodotto<sup>1</sup>?

<sup>1</sup>Ricordiamo che  $X \sim \text{Po}(\lambda)$  se  $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$  quando  $k \in \mathbb{N}$  e  $p_X(k) = 0$  altrimenti. Per  $X \sim \text{Po}(4)$ , potrebbe essere utile usare la seguente tabella: per  $k = 0, 1, \dots$ ,

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$p_X(k) =$	0.018	0.073	0.147	0.195	0.195	0.156	0.104	0.060	0.030	0.013	...

**Esercizio 11.** Sia  $X$  una v.a. con funzione di distribuzione  $F_X$ :  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Dimostrare che<sup>2</sup>, per ogni  $a \leq b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

- (a)  $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$ ;
- (b)  $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ ;
- (c)  $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$ ;
- (d)  $\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$ ;
- (e)  $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$ .

**Esercizio 12.** Siano date le seguenti funzioni<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \left(1 - \frac{1}{2+x}\right)1_{\{x \geq 0\}}, & F_2(x) &= \left(1 - \frac{1}{2+x}\right)1_{\{x > 0\}}, \\ F_3(x) &= \left(1 - e^{-\lambda x}\right)1_{\{x > 0\}}, & F_4(x) &= \left(1 - e^{-\lambda x}\right)1_{\{x \geq 0\}}, \\ F_5(x) &= \frac{1}{2}1_{\{-8 \leq x < -1\}} + \frac{3}{4}1_{\{-1 \leq x \leq 72\}} + 1_{\{x > 72\}}, \\ F_6(x) &= -\frac{3}{4}1_{\{x < -8\}} - \frac{1}{4}1_{\{-8 \leq x < -1\}} + \frac{3}{4}1_{\{x < 72\}} + 1_{\{x \geq 72\}}, \\ F_7(x) &= \frac{1}{2}1_{\{-8 \leq x < -1\}} + \frac{3}{4}1_{\{x < 72\}} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Per ogni  $i = 1, \dots, 7$ , disegnare  $F_i$  e dire se  $F_i$  può essere la funzione di ripartizione di qualche v.a.<sup>4</sup>  $X_i$  e in caso affermativo, dire quanto vale  $\mathbb{P}(X_i = x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 13.** Sia  $X$  una v.a discreta, a valori in  $E_X$ , con densità discreta  $p_X(x)$ ,  $x \in E_X$ , e funzione di distribuzione  $F_X(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Fissato  $N \geq 1$ , siano  $Y_N$  e  $Z_N$  due “troncamenti” di  $X$ :

$$Y_N = \begin{cases} -N & \text{se } X < -N \\ X & \text{se } |X| \leq N \\ N & \text{se } X > N \end{cases} \quad Z_N = \begin{cases} X & \text{se } |X| \leq N \\ 0 & \text{se } |X| > N \end{cases}$$

o, equivalentemente,  $Y_N = -N1_{\{X < -N\}} + X1_{\{|X| \leq N\}} + N1_{\{X > N\}}$  e  $Z_N = X1_{\{|X| \leq N\}}$ .

- (a) Dire quali valori possono assumere  $Y_N$  e  $Z_N$  e con quale probabilità. Giustificare il termine “troncamento”.
- (b) Disegnare le funzioni di ripartizione  $G_N$  e  $H_N$  rispettivamente di  $Y_N$  e  $Z_N$ .
- (c) Come si comportano  $G_N$  e  $H_N$  quando  $N \rightarrow +\infty$ ?

**Esercizio 14.** Al Luna Park, Luca e Sara si sfidano al tiro a segno, tirando una volta per ciascuno. Vince chi per primo colpisce il bersaglio. È noto che Sara colpisce il bersaglio con probabilità  $1/2$  e sia  $\alpha$ , con  $0 < \alpha < 1$ , la probabilità con la quale Luca tira a segno. Determinare, qualora esista, il valore di  $\alpha$  che rende equiprobabile la vittoria di Luca e Sara quando

<sup>2</sup>Si ricorda che  $F_X(x^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x - 1/n)$ .

<sup>3</sup>Si ricorda che, per  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $1_{\{x \in A\}}$  o anche  $1_A(x)$  vale 1 per  $x \in A$  e 0 altrimenti.

<sup>4</sup>Ovvero,  $F_i$  soddisfa alle 3 proprietà caratteristiche: 1)  $F_i$  è monotona non decrescente; 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_i(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_i(x) = 1$ ; 3)  $F_i$  è càdlàg, cioè continua da destra ( $F_i(x^+) = F_i(x)$ ) e limitata da sinistra ( $F_i(x^-)$  finito).

- (a) Luca comincia il gioco;
- (b) Sara comincia il gioco;
- (c) il primo giocatore viene scelto per sorteggio casuale.