PS - Probabilità e Statistica, 9 cfu (mat/06)
A.A. 2022/2023

Informazioni e programma del corso
Università Tor Vergata
docenti: Lucia Caramellino[1], Stefano Vigogna[2]

Informazioni sul corso

Il corso ha una classe MSTeams dedicata, gli studenti di Tor Vergata possono chiedere di essere ammessi al team.

Prerequisiti

Nessun prerequisito formale. È essenziale una adeguata conoscenza degli strumenti di matematica svolti nel primo biennio.

Modalità d'esame

L'esame consiste in una prova scritta ed in una prova orale. L'esame scritto prevede esercizi sugli argomenti svolti nel corso, l'orale prevede la verifica dei concetti teorici e delle dimostrazioni svolte in aula. La prova scritta vale solo per la sessione in cui viene superata (ad esempio, lo scritto di giugno e/o luglio è spendibile solo nella I sessione).
Durante il corso sono state proposte due prove in itinere ("esoneri") a sostituzione della prova scritta. La media dei punteggi dei due esoneri deve essere almeno 18, e ciascun punteggio deve essere almeno 15. Esclusivamente al primo appello della sessione estiva verrà data la possibilità di recuperare uno dei due esoneri (una volta consegnata la prova, sia essa il recupero di un esonero o l'esame scritto del I appello, il punteggio precedente viene cancellato – anche se eventualmente superiore al punteggio nuovo). La validità degli esoneri è limitata alla I sessione (giugno/luglio 2023).
Per sostenere l'esame, gli studenti devono obbligatoriamente prenotarsi alla pagina ServiziOnLine di Tor Vergata (`https://delphi.uniroma2.it/totem/jsp/index.jsp`). Per gli appelli della II e III sessione [settembre 2022 e febbraio 2023] la chiusura delle prenotazioni è anticipata di una settimana rispetto alla data dello scritto.

Testi consigliati

- P. Baldi: *Calcolo delle Probabilità. Seconda edizione.* McGraw-Hill, 2011.

[1] Dipartimento di Matematica, Università di Roma-Tor Vergata. Email: `caramell@mat.uniroma2.it`; web: `http://www.mat.uniroma2.it/~caramell`
[2] Dipartimento di Matematica, Università di Roma-Tor Vergata. Email: `vigogna@mat.uniroma2.it`; web: `http://www.mat.uniroma2.it/~vigogna`

- Tutorati I-X, disponibili sulla classe MSTeams (con le soluzioni) oppure all'indirizzo `www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_2223/ps.htm`.

- L. Caramellino: *Complementi sulla convergenza di variabili aleatorie*, note disponibili sulla classe MSTeams.

Programma dettagliato

Spazi di probabilità

Spazi campionari, σ-algebre (o insiemi degli eventi), misure di probabilità. Lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Esempi. La probabilità uniforme. Proprietà generali della probabilità. Monotonia della probabilità. La probabilità condizionata (anche come "nuova" misura di probabilità). Conseguenze: la formula delle probabilità totali e la formula di Bayes. Indipendenza tra eventi. Le prove ripetute e lo schema (successo-insuccesso) di Bernoulli. Richiami di calcolo combinatorio (permutazioni, disposizioni, combinazioni). Urne composte da due classi diverse di elementi ed estrazioni: lo schema con rimpiazzo (di Bernoulli, legge binomiale) e senza rimpiazzo (legge ipergeometrica).

[cfr. Baldi, Cap 1; Tutorato I]

Variabili aleatorie discrete

Definizione di variabile aleatoria e discussione sulle richieste della definizione. Legge di una variabile aleatoria (v.a.). V.a. discrete, densità discreta. V.a. bernoulliane (funzione indicatrice), binomiali, ipergeometriche. Legge binomiale come limite della legge ipergeometrica. Legge geometrica e geometrica modificata. Proprietà di mancanza di memoria delle leggi geometriche e caratterizzazione della legge geometrica come unica legge discreta senza memoria. La legge di Poisson, anche come legge limite di leggi binomiali. Funzioni di ripartizione: definizione e le tre proprietà caratteristiche. Funzioni di ripartizione di v.a. discrete.
V.a. discrete m-dimensionali: densità congiunta e marginali. Calcolo delle marginali dalla densità congiunta. La legge uniforme su un insieme finito di $\mathbb{R}^m$. Esistenza di più leggi congiunte aventi le stesse marginali. La distribuzione multinomiale. Definizione di indipendenza tra v.a. Caso v.a. discrete: equivalenza fra indipendenza e fattorizzazione della densità discreta congiunta nel prodotto delle densità marginali. Indipendenza di due v.a. quando la densità congiunta si fattorizza nel prodotto di funzioni dipendenti ciascuna dalle singole variabili. Indipendenza di $\phi(X)$ e $\psi(Y)$ quando X e Y sono discrete e indipendenti. Densità condizionale. Funzioni di variabili casuali, indipendenza e calcolo delle densità. Calcoli con le densità. La densità della somma di v.a. discrete quando è nota la densità congiunta. Caso particolare quando le v.a. sono indipendenti. Esempi: somma di binomiali indipendenti con lo stesso parametro p, somma di Poisson indipendenti, somma di geometriche. La legge del max e del min di due v.a. Somme aleatorie.
Definizione di speranza matematica per v.a. discrete. Esistenza nel caso di v.a. limitate. Esistenza e calcolo della speranza matematica per funzioni di v.a. La media aritmetica

come la speranza matematica di una v.a. uniforme su un insieme finito. Le proprietà della speranza matematica (linearità, positività etc.). Esistenza della media nel caso di v.a. il cui valore assoluto si stima dall'alto con una v.a. che ha speranza matematica finita. Calcolo della speranza matematica per la legge bernoulliana (caso particolare: funzione indicatrice), binomiale e ipergeometrica. Calcolo della speranza matematica della legge geometrica, geometrica modificata e di Poisson. L'identià di Wald per somme aleatorie. Fattorizzazione della media nel caso di v.a. indipendenti: $X \perp\!\!\!\perp Y$ sse per ogni funzione φ, ψ tali che $\varphi(X)$ e $\psi(Y)$ hanno media allora $\varphi(X)\psi(Y)$ ha media e $\mathbb{E}(\varphi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(\varphi(X))\mathbb{E}(\psi(Y))$. La media condizionale. Momenti e momenti centrati. Esistenza del momento di ordine r quando esiste il momento di ordine $k \geq r$. La somma di v.a. che hanno momento di ordine k ha ancora momento di ordine k. La varianza. Interpretazione della media e della varianza: media come migliore costante che approssima una v.a. e varianza come indicatore della qualità dell'approssimazione ("dispersione" intorno alla media). La disuguaglianza $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2$. Disuguaglianza di Markov e di Chebyshev. Proprietà della varianza (dilatazione e invarianza per traslazioni deterministiche). La covarianza. Relazione tra non correlazione ed indipendenza di due v.a. Varianza della somma di v.a. Calcolo della varianza per v.a. di legge bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, di Poisson, geometrica e geometrica modificata. Disuguaglianza di Markov e di Cauchy-Schwarz. Coefficiente di correlazione. La retta di regressione; significato di "dipendenza positiva" e "dipendenza negativa" in termini del segno della covarianza. La media condizionata di Y dato X come "migliore approssimazione" di Y con una funzione della X. La convergenza in probabilità e la Legge Debole dei Grandi Numeri (LDGN) per v.a. discrete. La disuguaglianza di Chebycev per determinare la velocità di convergenza nella LDGN.

[cfr. Baldi, Cap 2 (esclusi paragrafi 10 e 11); Tutorati II, III, IV, V]

Variabili aleatorie assolutamente continue

V.a. continue e assolutamente continue: definizione di densità e proprietà; esistenza della densità nota la funzione di ripartizione. Esempi di leggi assolutamente continue: legge uniforme, esponenziale (come l'unica legge continua che verifica la proprietà di assenza di memoria), di Weibull. Calcolo di leggi: densità di una v.a. che è funzione di una v.a. assolutamente continua. Esempio: legge di X^2 e di $aX + b$, $a \neq 0$, quando X ha densità continua. La legge del max e del min di due v.a. indipendenti ed assolutamente continue. Vettori aleatori a.c. di $\mathbb{R}^2$: densità congiunta e proprietà; esistenza delle densità marginali e rappresentazione in termini di integrale. La legge uniforme su un insieme di $\mathbb{R}^2$ di misura positiva e finita. V.a. indipendenti con densità congiunta continua: fattorizzazione della densità nel prodotto delle densità marginali e viceversa. Calcoli con densità congiunte. Densità della somma di v.a. che hanno densità continua congiunta. La legge Gamma. Calcoli con densità congiunte: uso del teorema del cambio di variabile (TCV) per calcolare la densità di $\phi(X)$ quando X è una v.a. con densità e ϕ è diffeomerfismo. Versione bis dell'uso del TCV: basta che le restrizioni di ϕ a n aperti $O_1, \ldots, O_n$ a due a due disgiunti siano dei diffeomorfismi e che $\mathbb{P}(X \in O_1 \cup \cdots \cup O_n) = 1$. Speranza matematica per v.a. con densità: definizione. Speranza matematica per v.a. che sono funzioni di v.a. con densità continua. Proprietà della speranza matematica (linearità, positività e monotonia).

Esempi: speranza matematica della legge uniforme, della legge gamma ed esponenziale, della legge gaussiana. Momenti e momenti centrati. Varianza. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Covarianza e proprietà. Matrice di covarianza e proprietà. Calcolo della matrice di covarianza di una trasformazione lineare affine. Legge normale $N(\mu, \sigma^2)$: proprietà, esistenza dei momenti, calcolo della media e della varianza. I quantili della legge gaussiana. Legge del quadrato di una gaussiana standard e legge della somma dei quadrati di n gaussiane standard e indipendenti: la legge Chi-quadro con n gradi di libertà. La legge Beta: calcolo della media e della varianza.
Vettori aleatori in $\mathbb{R}^m$: la densità congiunta; le densità marginali e loro calcolo a partire dalla densità congiunta; indipendenza e proprietà di fattorizzazione della densità congiunta. Indipendenza di v.a. che sono funzioni di vettori aleatori indipendenti.

[cfr. Baldi, Cap. 3, da par. 3.1 a par. 3.9; Tutorati VI, VII]

La funzione caratteristica

Variabili aleatorie complesse. La funzione caratteristica (f.c.). Calcolo esplicito per la legge binomiale, geometrica, di Poisson, esponenziale, Gamma, uniforme. Le proprietà: la f.c. della somma di v.a. indipendenti; la f.c. di una trasformazione lineare-affine; il legame tra la derivabilità della f.c. ed i momenti (s.d.). La f.c. della legge gaussiana. Altre proprietà legate alle f.c.: se due v.a. hanno la stessa f.c. allora hanno la stessa legge (s.d.); uso della f.c. per dimostrare che una trasformazione linerare di gaussiane indipendenti ha legge gaussiana; caratterizzazione della f.c. di v.a. indipendenti. La f.c. delle coordinate di un vettore aleatorio. La legge normale multivariata: definizione in termini della funzione caratteristica; interpretazione dei parametri (vettore delle medie e matrice di covarianza). Scrittura esplicita della densità di probabilità quando la matrice di covarianza è non degenere e cenni sul fatto che la densità esiste se e solo se la matrice di covarianza è non degenere. Proprietà dei vettori gaussiani: legge gaussiana delle componenti; equivalenza tra componenti indipendenti e covarianza nulla quando il vettore aleatorio ha legge gaussiana; legge normale di una trasformazione lineare affine di un vettore aleatorio normale.

[cfr. Baldi, Cap. 3, par. 3.13 e par. 3.14; Tutorati VII, VIII]

Convergenza ed approssimazione

La convergenza quasi certa e la convergenza in probabilità: definizioni. Proprietà della convergenza q.c. e in probabilità (per "$\stackrel{*}{\to}$" uguale a "$\stackrel{\text{q.c.}}{\to}$" e "$\stackrel{P}{\to}$": se $X_n \stackrel{*}{\to} X$ e $X_n \stackrel{*}{\to} Y$ allora $X = Y$ q.c.; se $X_n \stackrel{*}{\to} c$ allora per ogni f continua si ha $f(X_n) \stackrel{*}{\to} f(c)$; se $X_n \stackrel{*}{\to} X$ e $Y_n \stackrel{*}{\to} Y$ allora $X_n + Y_n \stackrel{*}{\to} X + Y$; se $X_n \stackrel{*}{\to} X$ e $c_n \to c$ allora $c_n X_n \stackrel{*}{\to} cX$). La LDGN riscritta in termini di convergenza in probabilità. Definizione di stimatore. I classici stimatori non distorti e consisenti della media e della varianza. La convergenza in legge come convergenza più debole della convergenza in probabilità (se $X_n \stackrel{P}{\to} X$ allora $X_n \stackrel{\mathcal{L}}{\to} X$. Esempio: convergenza in legge di v.a. $\text{Bi}(n, \lambda/n)$ ad una v.a. di legge $\text{Po}(\lambda)$. Il teorema di convergenza di Lévy (senza dimostrazione). Cenni sul logaritmo complesso. Il teorema del limite centrale (TLC). Applicazione del TLC: l'approssimazione normale. Primo esempio di rilievo: approssimazione normale della legge $\mathrm{Bi}(n,p)$ con n grande. La "correzione di continuità" nell'approssimazione normale per v.a. discrete, in particolare per la legge $\mathrm{Bi}(n,p)$ con n grande. Intervalli di fiducia: definizione formale. Uso dell'approssimazione normale per il calcolo di intervalli di fiducia approssimati. Caso in cui non si conosce la varianza: 1) uso di una stima dall'alto, se esiste; 2) uso dello stimatore classico non distorto e consistente.

[cfr. Baldi, Cap. 4; note distribuite dal docente; Tutorato IX]

Catene di Markov

Processi aleatori e catene di Markov. Catene di Markov omogenee. La catena che descrive il "problema della rovina del giocatore". Funzione o matrice di transizione markoviana come matrice stocastica. La distribuzione iniziale. La matrice di transizione in m passi. La distribuzione congiunta di una catena di Markov in k istanti prefissati. La relazione di comunicazione tra stati della catena. Classi chiuse e irriducibili; stati assorbenti. Stati transitori e ricorrenti. Caratterizzazione degli stati transitori (e quindi ricorrenti) per catene di Markov a stati finiti [s.d.]. Decomposizione degli stati in unione disgiunta dell'insieme degli stati transitori e delle classi irriducibili [s.d.]. Le distribuzioni invarianti. Il teorema di Markov-Kakutani sull'esistenza di una distribuzione invariante per catene a stati finiti. Distribuzioni invarianti per la catena che descrive il problema della rovina del giocatore. Importanza dell'ipotesi "stati finiti" nel torema di Markov-Kakutani: non esistenza di distribuzioni invarianti per la passeggiata aleatoria simmetrica su $\mathbb{Z}$. Catene regolari. Il criterio di regolarità per catene finite, irriducibili e tali che almeno un elemento della diagonale della matrice di transizione sia positivo. Il teorema di Markov [s.d.]. Il teorema di unicità della distribuzione invariante per catene finite ed irriducibili. Distribuzione invariante per matrici di transizione bistocastiche. Stazionarietà di una distribuzione reversibile. Esempio: passeggiata a caso su grafi connessi. Esempi di passeggiate a caso su grafo che danno luogo ad una catena regolare oppure ad una catena non regolare. La probabilità di passaggio per una classe di stati C: il sistema di equazioni lineari quando la catena parte da uno stato che non appartiene a C ma che comunica con C. Le probabilità di passaggio nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato transitorio. Applicazione al problema della rovina del giocatore: calcolo della probabilità di rovina e di vittoria. Tempi medi di assorbimento nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato transitorio: il sistema associato.

[cfr. Baldi, Cap 5, da par. 5.1 a par. 5.6; Tutorato X]