II esonero di Probabilità e Statistica
a.a. 2022/2023
31 Maggio 2023

Esercizio 1. Sia (X, Y) un vettore aleatorio in $\mathbb{R}^2$ con densità di probabilità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{xy^2} \mathbb{1}_{y>x>1}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Calcolare le leggi marginali. X ha media? E Y?

b) Posto $U = \ln X$ e $V = \ln Y - \ln X$, verificare che U e V sono ben poste e determinare la densità congiunta di (U, V). Si tratta di una legge nota?

Esercizio 2. Siano X e Y v.a. indipendenti di legge $\text{Exp}(1)$ e siano (X_k, Y_k), $k \geq 1$ copie indipendenti di (X, Y).

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\big|\sum_{k=1}^n (X_k + Y_k) + \sqrt{2n} - 2n\big| > \sqrt{2n}\big)$.

b) Posto $W_n = \min_{1\leq k\leq n}(X_k + Y_k)$ e $T_n = \max_{1\leq k\leq n}(X_k + Y_k)$, studiare la convergenza in legge delle successioni $\{W_n\}_{n\geq 1}$ e $\{T_n\}_{n\geq 1}$. $\{W_n\}_{n\geq 1}$ e/o $\{T_n\}_{n\geq 1}$ convergono in probabilità?

Esercizio 3. Sia (X, Y) un vettore gaussiano su $\mathbb{R}^2$.

a) Dimostrare che $X - Y \perp\!\!\!\perp X + Y$ se e solo se $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$.

b) Supponiamo che (X, Y) abbia legge $\mathcal{N}(0, C)$, con $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, sia $Z_n = \alpha^{2n} X + \alpha^{2(n+1)} Y$. Studiare la convergenza in legge della successione $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ al variare di α.

Esercizio 4. Una moneta dà testa con probabilità p. È noto che $p > \frac{3}{4}$.

a) Determinare uno stimatore non distorto e consistente per $\gamma = \frac{3}{4} - p$.

b) Fissato $\alpha \in (0, 1)$, scrivere un intervallo di fiducia a livello $1 - \alpha$ per γ.