I ESONERO DI PROBABILITÀ E STATISTICA
A.A. 2022/2023
21 APRILE 2023

Esercizio 1. In un magazzino sono raccolti in equal numero lotti di lampadine prodotti da 3 diversi stabilimenti. Sono difettose il 10% delle lampadine prodotte dallo stabilimento $\mathcal{A}$, 7% di quelle prodotte dallo stabilimento $\mathcal{B}$, e il 6% di quelle prodotte dallo stabilimento $\mathcal{C}$. Da un lotto di 100 lampadine scelto a caso fra quelli in magazzino, l'addetto al controllo qualità estrae 2 lampadine.

a) Qual è la probabilità che l'addetto osservi una lampadina difettosa e una funzionante?

b) Se l'addetto osserva una lampadina difettosa e una funzionante, da quale stabilimento è più probabile provenga il lotto esaminato?

Esercizio 2. Il cliente di un casinò continuerà a scommettere alla roulette sul rosso fino a quando non avrà vinto 2 volte.

a) Qual è la probabilità che debba scommettere 9 volte?

b) Dimostrare che il numero di scommesse perse fra la prima e la seconda scommessa vinta ha distribuzione geometrica.

c) Qual è il numero atteso di scommesse? [Sugg.: si può ragionare in termini di numero atteso di scommesse perse.]

d) Supponendo che il cliente vinca 5 euro se esce rosso e perde 5 euro altrimenti, qual è la sua vincita attesa? [Se il punto c) non è stato risolto, indicare con n il numero atteso di scommesse.]

Esercizio 3. Sia $\gamma \in (0,1)$. Una moneta viene scelta con probabilità γ da un set di monete di tipo $\mathcal{R}$ e con probabilità $1-\gamma$ da un set di monete di tipo $\mathcal{Q}$. Le monete di tipo $\mathcal{R}$ restituiscono testa con probabilità $1-\gamma$, quelle di $\mathcal{Q}$ danno testa con probabilità γ. Una volta scelta, la moneta viene lanciata ripetutamente. Per $i \geq 1$, sia A_i l'evento *"all'i-esimo lancio esce testa"* e sia $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$.

a) Stabilire per quali valori di γ gli eventi A_1 e A_2 sono indipendenti.

b) Per $i \neq j$, calcolare la legge congiunta di X_i e X_j. Si tratta di v.a. indipendenti? E se no, sono legate da che tipo di dipendenza?

c) Sia $X = X_1$ e $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Calcolare la media condizionale di X dato Y.

Esercizio 4. Siano $\lambda, \mu > 0$ e sia (X,Y) una coppia di v.a. discrete di densità discreta congiunta

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{x!(y-x)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x \mu^y & \text{se } x,y \in \mathbb{N} \text{ e } y \geq x, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(Y \leq X+1)$.

b) Determinare la legge congiunta di X e $Z = Y - X$. Sono indipendenti? Hanno legge nota?

c) Calcolare, dopo averne discusso l'esistenza, media e varianza di X e Z.

d) Scrivere la retta di regressione di Y rispetto a X.

e) Supponiamo d'ora in poi che $\lambda, \mu \leq 1$. Siano (X_k, Z_k), $k \geq 1$, copie indipendenti di (X,Z) e sia $S_n = \sum_{k=1}^n (\mu X_k - \lambda Z_k)$. Determinare n affinché $\mathbb{P}(S_n \geq 2n) \leq 0.1$.