

PROVA SCRITTA DI PROBABILITÀ E STATISTICA
I APPELLO, III SESSIONE, A.A. 2022/2023
24 GENNAIO 2024

Esercizio 1. Un'urna contiene 3 palline gialle e $n - 3$ palline rosse, dove $n \geq 3$.

- Vengono effettuate 2 estrazioni con rimpiazzo. Calcolare per quali valori di n vengono estratte tutte palline gialle con probabilità $\geq 1/9$.
- Vengono effettuate 3 estrazioni senza rimpiazzo. Calcolare n affinché in media escano almeno 2 palline rosse.

Esercizio 2. Sia (X, Y) una v.a. discreta a valori in $\{\pm 1\} \times \mathbb{Z}$ con densità discreta congiunta

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{\lambda^{|y|}}{2^{|y|} |y|!} e^{-\lambda} & \text{se } x = \pm 1, y \in \mathbb{Z} \text{ e } xy \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{dove } \lambda > 0 \text{ è fissato.}$$

- X e Y sono indipendenti?
- Verificare che $Z = Y/X$ è ben posta e calcolarne la legge.

Poiché la legge di Z dipende dal parametro λ , scriveremo $Z \equiv Z_\lambda$.

- Posto $\lambda = n$, studiare la convergenza in legge di $V_n = \frac{1}{n} Z_n$ quando $n \rightarrow \infty$.

Esercizio 3. Siano X e Y v.a. indipendenti tali che $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $Y \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- Calcolare la legge di X^2 .
- Calcolare la legge di $Z = X^2 + Y$.
- Siano X_n , $n \geq 1$, copie indipendenti di X . Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k^2 - 1) \leq 1\right).$$

Esercizio 4. Sia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ una catena di Markov a valori in $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

- Calcolare, se i dati lo consentono, $\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 2)$ e $\mathbb{P}(X_2 = 3)$.
- Classificare gli stati della catena e scrivere tutte le classi chiuse irriducibili.
- Calcolare, se esistono, tutte le distribuzioni stazionarie.
- Dire se esiste ed in caso affermativo calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n \mid X_0 = 2)$.