

PROVA SCRITTA DI PROBABILITÀ E STATISTICA
II APPELLO, II SESSIONE, A.A. 2022/2023
27 SETTEMBRE 2023

Esercizio 1. Una fabbrica produce dadi che per il 10% hanno il seguente difetto: in un generico lancio, la faccia con 1 esce con probabilità $\frac{1}{3}$ e tutti gli altri esiti sono equiprobabili. Un dado prodotto dalla fabbrica viene lanciato due volte. Sia $X =$ numero di risultati pari nei due lanci.

- Se nei due lanci si è ottenuto un pari e un dispari, qual è la probabilità di aver scelto un dado equilibrato?
- Calcolare la densità (dicreta) di X . Qual è la sua media?

Supponiamo ora che la fabbrica apra un nuovo stabilimento. Per avere informazioni sulla qualità della sua produzione, vengono effettuati degli esperimenti e si osserva che, in una serie di lanci, con probabilità circa 0.5 i dadi restituiscono un numero pari almeno 480 volte su 1200 lanci.

- Determinare un valore ragionevole della probabilità di ottenere un numero pari lanciando un dado prodotto nel nuovo stabilimento.

Esercizio 2. Date U e V v.a. su \mathbb{R} , con $U \perp\!\!\!\perp V$, $U \sim \text{Exp}(n)$ e $V \sim \text{Un}(0,1)$, siano $X = e^U$ e $Y = e^U/V$. Qui n denota un intero ≥ 2 .

- Calcolare la densità congiunta e le leggi marginali di X e Y .
- Gli eventi $\{X > 5\}$ e $\{Y < 2\}$ sono indipendenti?

Poiché la legge di X dipende da n , d'ora in poi scriveremo X_n .

- Studiare la convergenza in legge e in probabilità di $\{X_n\}_n$.

Esercizio 3. Sia $X = 2U - V$, dove (U, V) è un vettore gaussiano, con $\mathbb{E}(U) = 6$, $\mathbb{E}(V) = 2$ e matrice di covarianza

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

- Calcolare $\mathbb{P}(4 \leq X < 16)$.
- Determinare c tale che $\mathbb{P}(|X - 10| > c) = 0.1$.

Esercizio 4. Si consideri la catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Classificare gli stati della catena. La catena è irriducibile? Regolare?
- Qual è la probabilità partendo da 1 di passare prima o poi in $\{4, 5\}$? Cosa cambia se la terza riga di P viene sostituita con $(0, 0, 1, 0, 0)$?