PROVA SCRITTA DI PROBABILITÀ E STATISTICA
I APPELLO, II SESSIONE, A.A. 2022/2023
4 SETTEMBRE 2023

**Esercizio 1.** Una scatola contiene 2 palline rosse, 2 gialle e 2 blu. Una pallina viene estratta a caso, se ne osserva il colore e poi viene rimessa nella scatola aggiungendo una nuova pallina dello stesso colore. Dalla scatola viene successivamente estratta una pallina.

**a)** Se questa pallina è rossa, qual è la probabilità di aver aggiunto una pallina rossa?

Supponiamo ora di estrarre una seconda pallina (no rimpiazzo). Indichiamo con $X$, $Y$ e $Z$, rispettivamente, il numero di palline rosse, gialle e blu osservate in queste due estrazioni.

**b)** Determinare la densità discreta e la media di $X$.

**c)** Verificare che $X$ e $Y$ non sono indipendenti.

**d)** Calcolare $\mathbb{P}(X+Y=1)$.

**Esercizio 2.** Sia $(X,Y)$ un vettore aleatorio assolutamente continuo di densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{n^4}{8}(x^2-y^2)e^{-nx}\mathbb{1}_{x+y>0,x-y>0},$$

dove $n \geq 1$ è un intero. Siano $U = \frac{X+Y}{2}$ e $V = \frac{X-Y}{2}$.

**a)** Calcolare la densità congiunta e le densità marginali di $U$ e $V$.

Poiché la legge di $U$ dipende da $n$, ridenominiamo $U$ con $U_n$.

**b)** Studiare la convergenza in legge di $Z_n = \gamma_n U_n$ nei casi $\gamma_n = \sqrt{n}$, $\gamma_n = n$ e $\gamma_n = n\sqrt{n}$.

**Esercizio 3.** Sia $(X,Y)$ un vettore gaussiano in $\mathbb{R}^2$ di legge $\mathcal{N}(0,C)$. Siano date le matrici

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

**a)** Scegliere, tra $C_1$ e $C_2$, la matrice di covarianza $C$.

**b)** Per $a \in \mathbb{R}$, definiamo $U = aX + Y$ e $V = X + aY$. Determinare $a$ affinché $U \perp\!\!\!\perp V$.

**Esercizio 4.** 4 palline sono ripartite in due urne, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$. Ad ogni unità di tempo, una delle 4 palline viene scelta a caso e spostata dall'urna in cui si trova all'altra. Per $n \geq 1$, sia $X_n$ il numero di palline nell'urna $\mathcal{U}$ al tempo $n$.

**a)** Giustificare l'uso di una catena di Markov per il processo $\{X_n\}_n$ e determinare la matrice di transizione.

**b)** Classificare gli stati della catena. La catena è ricorrente? È regolare? Esistono le distribuzioni stazionarie? E se sì, quante sono?

**c)** Supponiamo ora che, per qualche motivo, una volta piena l'urna $\mathcal{U}$ rimanga tale (ad esempio, le palline si "incastrano" e non si riesce più ad estrarle). Partendo dall'urna vuota, quanto tempo occorre, in media, perché si riempia?