

PROVA SCRITTA DI PROBABILITÀ E STATISTICA
II APPELLO, I SESSIONE, A.A. 2022/2023
19 LUGLIO 2023

Esercizio 1. Due monete equilibrate vengono lanciate separatamente più volte. Sia X il numero di lanci necessari per ottenere testa con la prima moneta e sia Y il numero di lanci necessari per ottenere croce con la seconda moneta.

- a) Calcolare la densità (discreta) di $Z = X + Y$.
- b) Calcolare la media condizionale di X dato $Z = z$, specificando tutti i valori ammissibili per z .

[Potrebbe essere utile ricordare che, per $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$.]

Esercizio 2. Sia $\chi = \{X_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. di media 0 e varianza 2. Per $n \geq 1$, definiamo $Y_n = X_{2n}X_{2n+1}$.

- a) Verificare che le v.a. Y_n , $n \geq 1$, sono i.i.d. Calcolare $\mathbb{E}(Y_n)$ e $\text{Var}(Y_n)$.
- b) Posto $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$, calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|U_n| > 1)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\sqrt{n} U_n| > 1)$.

Esercizio 3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio in $\mathbb{R}^2$ assolutamente continuo di densità

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2} e^{-2x+y} \mathbb{1}_{x>0, y<x} + \frac{1}{2} e^{-y} \mathbb{1}_{x>0, y>x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Calcolare $\mathbb{P}(X > Y)$.
- b) Determinare la densità congiunta di X e $Z = X - Y$.
- c) Scrivere la retta di regressione di Y rispetto a X .

Esercizio 4. Consideriamo la catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- a) Determinare gli stati transitori e le classi irriducibili.
- b) Indicando con $\mathbb{E}^i$ l'aspettazione quando la catena parte da i , calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^i(X_n)$ per $i \in \{3, 4, 5\}$.
- c) Supponiamo che la legge iniziale sia $\nu = (0, 1, 0, 0, 0)$. Calcolare la probabilità che la catena raggiunga lo stato 5 prima dello stato 4.