Diario delle lezioni e del tutorato di

Probabilità e Statistica

a.a. 2022/2023

www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_2223/ps.htm

06/03/2023 - Lezioni 1, 2 [Vigogna]
Breve introduzione al corso. Fenomeni deterministici ed aleatori. Spazi campionari, σ-algebre (o insiemi degli eventi), misure di probabilità. Lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Esempi. La probabilità uniforme. Proprietà generali della probabilità.

[cfr. Baldi, Par. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4]

08/03/2023 - Lezioni 3, 4 [Vigogna]
Monotonia della probabilità. La probabilità condizionata (anche come "nuova" misura di probabilità). Conseguenze: la formula delle probabilità totali e la formula di Bayes. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.5]

10/03/2023 - Lezioni 5, 6, 7 [Vigogna]
Indipendenza tra eventi. Le prove ripetute e lo schema (successo-insuccesso) di Bernoulli. Richiami di calcolo combinatorio (permutazioni, disposizioni, combinazioni). Urne composte da due classi diverse di elementi ed estrazioni: lo schema con rimpiazzo (di Bernoulli, legge binomiale) e senza rimpiazzo (legge ipergeometrica). Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.5, 1.6]

13/03/2023 - Tutorato 1 [Vigogna/Caramellino]

[cfr. Team del corso]

15/03/2023 - Lezioni 8, 9 [Vigogna]
Definizione di variabile aleatoria e discussione sulle richieste della definizione. Legge di una variabile aleatoria. Variabili aleatorie discrete. Densità discreta. Esempi: v.a. bernoulliane (funzione indicatrice), binomiali, ipergeometriche.

[cfr. Baldi, Par. 2.1, 2.2]

17/03/2023 - Lezioni 10, 11, 12 [Vigogna]
Legge binomiale come limite della legge ipergeometrica. Legge geometrica e geometrica modificata. Esempi ed esercizi. Proprietà di mancanza di memoria delle leggi geometriche. Caratterizzazione della legge geometrica come unica legge discreta senza memoria. La legge di Poisson, anche come legge limite di leggi binomiali. Funzioni di ripartizione: definizione e proprietà caratteristiche. Funzioni di ripartizione di v.a. discrete.

[cfr. Baldi, Par. 2.2, 2.3]

20/03/2023 - Tutorato 2 [Vigogna/Caramellino]

[cfr. Team del corso]

22/03/2023 - Lezioni 13, 14 [Vigogna]

V.a. discrete m-dimensionali: densità congiunta e marginali. Calcolo delle marginali dalla densità congiunta. La legge uniforme. Esistenza di più leggi congiunte aventi le stesse marginali. Esempi ed esercizi sull'uso della densità (discreta) congiunta. La distribuzione multinomiale.

[cfr. Baldi, Par. 2.4]

24/03/2023 - Lezioni 15, 16, 17 [Vigogna]

Definizione di indipendenza tra v.a. Caso v.a. discrete: equivalenza fra indipendenza e fattorizzazione della densità discreta congiunta nel prodotto delle densità marginali. Densità condizionale. Funzioni di variabili casuali, indipendenza e calcolo delle densità. Calcoli con le densità. La densità della somma di v.a. discrete quando è nota la densità congiunta. Caso particolare quando le v.a. sono indipendenti. Esempi: somma di binomiali indipendenti con lo stesso parametro p, somma di Poisson indipendenti, somma di geometriche. La legge del max e del min di due v.a. Somme aleatorie. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.4, 2.5]

27/03/2023 - Tutorato 3 [Caramellino/Vigogna]

[cfr. Team del corso]

29/03/2023 - Lezioni 18, 19, 20 [Caramellino]

Esercizi sulle leggi congiunte. Definizione di speranza matematica per v.a. discrete. Esistenza nel caso di v.a. limitate. Esistenza e calcolo della speranza matematica per funzioni di variabili aleatorie. La media aritmetica come la speranza matematica di una v.a. uniforme su un insieme finito. Le proprietà della speranza matematica (linearità, positività etc.). Esistenza della media nel caso di v.a. il cui valore assoluto si stima dall'alto con una v.a. che ha speranza matematica finita. Calcolo della speranza matematica per la legge bernoulliana (caso particolare: funzione indicatrice), binomiale e ipergeometrica. Calcolo della speranza matematica della legge geometrica, geometrica modificata e di Poisson.

[cfr. Baldi, Par. 2.6]

31/03/2023 - Lezioni 21, 22, 23 [Caramellino]

L'identità di Wald per somme aleatorie. Fattorizzazione della media nel caso di v.a. indipendenti: $X \perp\!\!\!\perp Y$ sse per ogni funzione φ, ψ tali che $\varphi(X)$ e $\psi(Y)$ hanno media allora $\varphi(X)\psi(Y)$ ha media e $\mathbb{E}(\varphi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(\varphi(X))\mathbb{E}(\psi(Y))$. La media condizionale. Esercizi. Momenti e momenti centrati. Esistenza del momento di ordine r quando esiste il momento di ordine $k \geq r$. La somma di v.a. che hanno momento di ordine k ha ancora momento di ordine k. La varianza. Interpretazione della media e della varianza: media come migliore costante che approssima una v.a. e varianza come indicatore della qualità dell'approssimazione ("dispersione" intorno alla media). La disuguaglianza $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2$. Disuguaglianza di Markov e di Chebyshev. Proprietà della varianza (dilatazione e invarianza per traslazioni deterministiche). La covarianza.

[cfr. Baldi, Par. 2.6, 2.7]

03/04/2023 - Tutorato 4 [Caramellino]

[cfr. Team del corso]

05/04/2023 - Lezioni 24, 25, 26 [Caramellino]
Relazione tra non correlazione ed indipendenza di due v.a. Varianza della somma di v.a. Calcolo della varianza per v.a. di legge bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, di Poisson, geometrica e geometrica modificata. Disuguaglianza di Markov e di Cauchy-Schwarz. Coefficiente di correlazione. La retta di regressione; significato di "dipendenza positiva" e "dipendenza negativa" in termini del segno della covarianza. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.7, 2.9]

12/04/2023 - Lezioni 27, 28, 29 [Caramellino]
La media condizionata di Y dato X come "migliore approssimazione" di Y con una funzione della X. La convergenza in probabilità e la legge (debole) dei grandi numeri per v.a. discrete. La disuguaglianza di Chebycev per determinare la velocità di convergenza nella LDGN. Esempi. Richiami sulle proprietà delle funzioni di ripartizione. V.a. continue. V.a. assolutamente continue: definizione di densità e proprietà; esistenza della densità nota la funzione di ripartizione. Esempi di leggi assolutamente continue: legge uniforme, esponenziale (e proprietà di assenza di memoria)

[cfr. Baldi, Par. 2.8, 3.1]

14/04/2023 - Lezioni 30, 31, 32 [Caramellino]
Esercizi di preparazione all'esonero.
V.a. assolutamente continue. La legge esponenziale come l'unica legge continua che verifica la proprietà di assenza di memoria. La legge di Weibull. Calcolo di leggi: densità di una v.a. che è funzione di una v.a. assolutamente continua. Esempio: legge di X^2 e di $aX + b$, $a \neq 0$, quando X ha densità continua.

[cfr. Baldi, Par. 3.2]

17/04/2023 - Tutorato 5 [Caramellino/Vigogna]

[cfr. Team del corso]

19/04/2023 - Lezioni 33, 34, 35 [Caramellino]
La legge del max e del min di due v.a. indipendenti ed assolutamente continue. Vettori aleatori a.c. di $\mathbb{R}^2$: densità congiunta e proprietà; esistenza delle densità marginali e rappresentazione in termini di integrale. La legge uniforme su un insieme di $\mathbb{R}^2$ di misura positiva e finita. Esempi. V.a. indipendenti con densità congiunta continua: fattorizzazione della densità nel prodotto delle densità marginali. Viceversa, se la densità congiunta si fattorizza nel prodotto di due funzioni dipendenti ciascuna da una sola variabile allora le v.a. sono indipendenti. Esempi ed esercizi sulla relazione di indipendenza tra due v.a. e la fattorizzazione della densità congiunta. Calcoli con densità congiunte.

[cfr. Baldi, Par. 3.3]

21/04/2023 - Esonero [3 ore, Caramellino/Vigogna]

[cfr. Team del corso]

26/04/2023 - Lezioni 36, 37, 38 [Caramellino]
Densità della somma di v.a. che hanno densità continua congiunta. Esercizi. La legge gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Calcoli con densità congiunte: uso del teorema del cambio di variabile (TCV) per calcolare la densità di $\phi(X)$ quando X è una v.a. con densità e ϕ è diffeomerfismo. Esempio: legge di una trasformazione lineare-affine di un vettore aleatorio con densità. Esempi sull'uso del teorema del cambio di variabile per il calcolo di densità. Versione bis dell'uso del TCV: basta che le restrizioni di ϕ a n aperti $O_1, \dots, O_n$ a due a due disgiunti siano dei diffeomorfismi e che $\mathbb{P}(X \in O_1 \cup \cdots \cup O_n) = 1$. Esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 3.3, 3.4, 3.7]

26/04/2023 - Tutorato 6 e Lezioni 39, 40 [Caramellino]
Esercizi sul TCV. Definizione di legge gaussiana standard e non. Speranza matematica per v.a. con densità: definizione. Speranza matematica per v.a. che sono funzioni di v.a. con densità continua. Proprietà della speranza matematica (linearità, positività e monotonia). Esempi: speranza matematica della legge uniforme, della legge gamma ed esponenziale, della legge gaussiana. Momenti e momenti centrati. Varianza

[cfr. Team del corso e Baldi, Par. 3.5, 3.6]

03/05/2023 - Lezioni 41, 42, 43 [Caramellino]
Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Esempi. Covarianza e proprietà. Matrice di covarianza e proprietà. Calcolo della matrice di covarianza di una trasformazione lineare affine. Legge normale $N(\mu, \sigma^2)$: proprietà, esistenza dei momenti, calcolo della media e della varianza. I quantili della legge gaussiana ed esercizi. Legge del quadrato di una gaussiana standard e legge della somma dei quadrati di n gaussiane standard e indipendenti: la legge Chi-quadro con n gradi di libertà. La legge Beta: calcolo della media e della varianza.

[cfr. Baldi, Par. 3.5, 3.6, 3.7, 3.9]

05/05/2023 - Lezioni 44, 45, 46 [Caramellino]
V.a. su $\mathbb{R}^d$ assolutamente continue: densità di probabilità congiunta e marginali. Proprietà.
Variabili aleatorie complesse. La funzione caratteristica (f.c.). Calcolo esplicito per la legge binomiale, geometrica, di Poisson, esponenziale, Gamma, uniforme. Le proprietà: la f.c. della somma di v.a. indipendenti; la f.c. di una trasformazione lineare-affine; il legame tra la derivabilità della f.c. ed i momenti (s.d.). La f.c. della legge gaussiana. Altre proprietà legate alle f.c.: se due v.a. hanno la stessa f.c. allora hanno la stessa legge (s.d.); uso della f.c. per dimostrare che una trasformazione linerare di gaussiane indipendenti ha legge gaussiana; caratterizzazione della f.c. di v.a. indipendenti.

[cfr. Baldi, Par. 3.13]

08/05/2023 - Tutorato 7 [Caramellino]

[cfr. Team del corso]

10/05/2023 - Lezioni 47, 48 [Caramellino]
La f.c. delle coordinate di un vettore aleatorio. La legge normale multivariata: definizione in termini della funzione caratteristica; interpretazione dei parametri (vettore delle medie e matrice di covarianza). Scrittura esplicita della densità di probabilità quando la matrice di covarianza è non degenere e cenni sul fatto che la densità esiste se e solo se la matrice di

covarianza è non degenere. Proprietà dei vettori gaussiani: legge gaussiana delle componenti; equivalenza tra componenti indipendenti e covarianza nulla quando il vettore aleatorio ha legge gaussiana; legge normale di una trasformazione lineare affine di un vettore aleatorio normale.

[cfr. Baldi, Par. 3.13, 3.14]

10/05/2023 - Lezioni 49, 50, 51 [Caramellino]
Esercizi sulla legge gaussiana multivariata.
La convergenza quasi certa e la convergenza in probabilità: definizioni. Proprietà della convergenza q.c. e in probabilità (per "$\stackrel{*}{\to}$" uguale a "$\stackrel{\text{q.c.}}{\to}$" e "$\stackrel{P}{\to}$": se $X_n \stackrel{*}{\to} X$ e $X_n \stackrel{*}{\to} Y$ allora $X = Y$ q.c.; se $X_n \stackrel{*}{\to} c$ allora per ogni f continua si ha $f(X_n) \stackrel{*}{\to} f(c)$; se $X_n \stackrel{*}{\to} X$ e $Y_n \stackrel{*}{\to} Y$ allora $X_n + Y_n \stackrel{*}{\to} X + Y$; se $X_n \stackrel{*}{\to} X$ e $c_n \to c$ allora $c_n X_n \stackrel{*}{\to} cX$).

[cfr. Baldi, 3.14; note sulla convergenza]

15/05/2023 - Tutorato 8 [Vigogna/Caramellino]

[cfr. Team del corso]

17/05/2023 - Lezioni 52, 53, 54 [Caramellino]
La legge dei grandi numeri riscritta in termini di convergenza in probabilità. Definizione di stimatore. I classici stimatori non distorti e consisenti della media e della varianza. La convergenza in legge come convergenza più debole della convergenza in probabilità (se $X_n \stackrel{P}{\to} X$ allora $X_n \stackrel{\mathcal{L}}{\to} X$. Esempio: convergenza in legge di v.a. $\mathrm{Bi}(n, \lambda/n)$ ad una v.a. di legge $\mathrm{Po}(\lambda)$. Il teorema di convergenza di Lévy (senza dimostrazione). Esempi ed esercizi sulla convergenza in legge.

[cfr. Note sulla convergenza; Baldi, Par. 4.1, 4.2]

19/05/2023 - Lezioni 55, 56, 57, 58 [Caramellino]
Cenni sul logaritmo complesso. Il teorema del limite centrale (TLC). Applicazione del TLC: l'approssimazione normale. Primo esempio di rilievo: approssimazione normale della legge $\mathrm{Bi}(n, p)$ con n grande. La "correzione di continuità" nell'approssimazione normale per v.a. discrete, in particolare per la legge $\mathrm{Bi}(n, p)$ con n grande. Esercizi sull'approssimazione normale. Intervalli di fiducia: definizione formale. Uso dell'approssimazione normale per il calcolo di intervalli di fiducia approssimati. Caso in cui non si conosce la varianza: 1) uso di una stima dall'alto, se esiste; 2) uso dello stimatore classico non distorto e consistente.

[cfr. Baldi, Par. 4.4, 4.5]

22/05/2023 - Lezioni 59, 60 [Caramellino]
Esercizi e problemi sul TLC e le sue conseguenze.

[cfr. Baldi, Par. 4.4, 4.5]

24/05/2023 - Tutorato 9 e Lezione 61 [Caramellino]
Processi aleatori. Introduzione alle Catena di Markov. Definizione formale di catena di Markov. Esempi.

[cfr. Baldi, Par. 5.1]

26/05/2023 - Lezioni 62, 63 [Caramellino]
Funzione o matrice di transizione markoviana come matrice stocastica. La distribuzione iniziale. La matrice di transizione in m passi. La distribuzione congiunta di una catena di Markov in k istanti prefissati. La relazione di comunicazione tra stati della catena.
Discussione degli esercizi dei tutorati (preparazione all'esonero).

[cfr. Baldi, Par. 5.2, 5.3]

29/05/2023 - Lezioni 64, 65 [Caramellino]
Classi chiuse e irriducibili; stati assorbenti. Stati transitori e ricorrenti. Caratterizzazione degli stati transitori (e quindi ricorrenti) per catena di Markov a stati finiti [s.d.]. Decomposizione degli stati in unione disgiunta dell'insieme degli stati transitori e delle classi irriducibili [s.d.]. Esempi ed esercizi. Le distribuzioni invarianti. Il teorema di Markov-Kakutani sull'esistenza di una distribuzione invariante per catene a stati finiti.

[cfr. Baldi, Par. 5.3, 5.4]

05/06/2023 - Lezioni 66, 67 [Caramellino]
Distribuzioni invarianti per la catena che descrive il problema della rovina del giocatore. Importanza dell'ipotesi "stati finiti" nel torema di Markov-Kakutani: non esistenza di distribuzioni invarianti per la passeggiata aleatoria simmetrica su $\mathbb{Z}$. Catene regolari. Il criterio di regolarità per catene finite, irriducibili e tali che almeno un elemento della diagonale della matrice di transizione sia positivo. Il teorema di Markov [s.d.]. Il teorema di unicità della distribuzione invariante per catene finite ed irriducibili. Esempi.

[cfr. Baldi, Par. 5.4]

07/06/2023 - Lezioni 68, 69, 70 [Caramellino]
Distribuzione invariante per matrici di transizione bistocastiche. Stazionarietà di una distribuzione reversibile. Esempio: passeggiata a caso su grafi connessi. Esempi di passeggiate a caso su grafo che danno luogo ad una catena regolare oppure ad una catena non regolare. La probabilità di passaggio per una classe di stati C: il sistema di equazioni lineari quando la catena parte da uno stato che non appartiene a C ma che comunica con C. Le probabilità di passaggio nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato transitorio. Applicazione al problema della rovina del giocatore: calcolo della probabilità di rovina e di vittoria. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 5.4, 5.6]