Diario delle lezioni di

Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari

a.a. 2022/2023

`www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_2223/mmmf.htm`

Lezioni 1, 2, 3 - 03/10/2022
Introduzione al corso.

[cfr. Conferenza ScienzaOrienta "Numeri e dollari: probabilità e finanza" (scaricabile dalla classe MSTeams del corso)]

Lezioni 4, 5, 6 - 07/10/2022
Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito, teorema di Girsanov. Risultati preliminari sulla "martingala esponenziale (complessa)".

[cfr. Baldi, Cap. 7, 8, Par. 12.1 (in particolare, Proposizione 12.1); Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 7, 8, 9 - 11/10/2022
I teoremi di rappresentazione delle martingale browniane (TRMB). Conseguenza 1 dei TRMB: se $(M_t)_{t\in[0,T]}$ è una martingala locale browniana tale che $\sup_{t\le T}|M_t|$ è di quadrato integrabile allora $(M_t)_{t\in[0,T]}$ è una martingala browniana. e, a meno di una costante, si rappresenta come integrale stocastico di un processo in $M^2[0,T]$. Conseguenza 2 dei TRMB: caratterizzazione delle misure equivalenti a $\mathbb{P}$ su $(\Omega,\mathcal{F}_T)$, dove $\mathcal{F}_T=\sigma(B_s,\, s\le T)\vee\mathcal{N}$ (B = browniano, $\mathcal{N}$ = insiemi di misura nulla).

[cfr. Baldi, Par 12.3, 12.4; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3 (vd esercizio 15, punto 1)]

Lezioni 10, 11, 12 - 14/10/2022
Ancora richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema classico di esistenza ed unicità, stime in L^p, markovianità della soluzione, generatore infinitesimale).
Tassi di interesse. Il tasso istantaneo. Richiami: il moto browniano geometrico.
Il modello di Black e Scholes.

[cfr. Baldi, Cap. 9; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3 e Cap. 4.]

Lezioni 13, 14, 15 - 18/10/2022
Strategie di mercato e portafoglio associato. Definizione di strategie autofinanzianti. Prezzo e portafoglio scontati. Strategie autofinanzianti e caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato. La misura "equivalente di martingala" o "di rischio neutro". Strategie ammissibili e replicanti. Il teorema di replicabilità delle opzioni europee di quadrato integrabile

sotto la misura di rischio neutro (teorema di completezza del mercato). Il prezzo delle opzioni europee.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 16, 17, 18 - 21/10/2022
Opzioni il cui payoff dipende dal sottostante a maturità: la funzione-prezzo. L'equazione alle derivate parziali per la funzione-prezzo ed il calcolo della copertura (strategia replicante). Le Greche di un'opzione. La formula di parità per opzioni call/put nel modello di Black e Scholes e le formule per il prezzo e per la copertura delle opzioni call e put.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 19, 20, 21 - 25/10/2022
Il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo (con particolare attenzione alla scelta di ipotesi meno restrittive per le funzioni r_t, μ_t, σ_t). Introduzione al modello di Garman-Kohlaghen (opzioni su valute).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 1 e 2]

Lezioni 22, 23, 24 - 28/10/2022
Il modello di Garman-Kohlaghen (opzioni su valute). Opzioni di scambio su due sottostanti nel modello di Black e Scholes (bivariato) – Parte I.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 2 e 3]

Lezioni 25, 26, 27 - 04/11/2022
Opzioni di scambio su due sottostanti nel modello di Black e Scholes (bivariato) – Parte II e III. Opzione composta call su call – punti 1., 2. e 3. (a).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 3 e 5]

Lezioni 28, 29, 30 - 08/11/2022
Opzione composta call su call (punti 3. e 4.). Opzione asiatica (parte I).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 5 e 7]

Lezioni 31, 32, 33 - 11/11/2022
Opzione asiatica (parte II e parte III).
Modelli generali (di Ito) per la finanza: il "rumore" descritto tramite un browniano in $\mathbb{R}^d$, il prezzo del titolo non rischioso con un tasso di interesse istantaneo aleatorio, i prezzi degli m titoli rischiosi descritti tramite processi di Ito. Le strategie autofinanzianti e la loro caratterizzazione usando il portafoglio scontato. Le strategie ammissibili e di arbitraggio. La misura equivalente di martingala $\mathbb{P}^*$: esistenza. Il moto browniano sotto $\mathbb{P}^*$. Dinamica dei prezzi scontati sotto una misura equivalente di martingala $\mathbb{P}^*$ e il sistema lineare per la determinazione della densità di $\mathbb{P}^*$ rispetto a $\mathbb{P}$.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 7; Baldi, Par. 13.4]

Lezioni 34, 35, 36 - 15/11/2022
Prezzo di "non arbitraggio" per un'opzione replicabile in presenza di una misura equivalente di martingala. Indipendenza del prezzo di un'opzione replicabile dalla misura equivalente di

martingala rispetto alla quale è replicabile. Definizione di mercato completo ed unicità della misura equivalente di martingala in un mercato completo.
Il modello di diffusione per la descrizione dei mercati finanziari: definizione, richieste sui coefficienti del modello. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una misura equivalente di martingala.

[cfr. Baldi, Par. 13.4, 13.5]

Lezioni 37, 38, 39 - 18/11/2022
La condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l'esistenza (e l'eventuale unicità) della misura equivalente di martingala. Teorema classico di completezza del mercato. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare; l'EDP parabolica associata e la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo.

[cfr. Baldi, Par. 13.6]

Lezioni 40, 41, 42 - 25/11/2022
La regolarità della funzione-prezzo di un'opzione europea di payoff dipendente dal prezzo dei titoli a maturità: legame con EDP paraboliche. Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante. La regolarità della funzione-prezzo come conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (forte) di una EDP parabolica con termine del secondo ordine uniformemente ellittico (cambio di variabile). EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): il teorema di esistenza ed unicità (s.d.) e la formula di rappresentazione per la soluzione.

[cfr. Baldi, Par. 13.6, 10.3]

Lezioni 43, 44, 45 - 29/11/2022
EDP paraboliche con problema di Cauchy su $\mathbb{R}^m$: il teorema di esistenza ed unicità (s.d.) e la formula di Feynman-Kac per la rappresentazione della soluzione. Uso della formula per determinare le condizioni sul tasso di interesse, sulla volatilità e sulla funzione-payoff affinché la funzione-prezzo sia soluzione regolare dell'EDP parabolica associata e, quindi, sia regolare quanto basta per il calcolo della copertura.
Metodi Monte Carlo: generalità. L'IC di output.

[cfr. Baldi, Par. 10.4; Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 1]

Lezioni 46, 47, 48 - 02/12/2022
Simulazione di v.a. gaussiane tramite il generatore di Box-Muller. Simulazione del moto browniano.
Simulazione del moto browniano geometrico. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard. Confronto con le formule esatte e studio empirico della velocità di convergenza al crescere del numero di simulazioni. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni asiatiche call/put standard. Uso delle formule di parità per la validazione del programma. Opzioni con barriera: valutazione numerica del prezzo con Monte Carlo tramite (a) approssimazione del sup su $[0, T]$ con il max osservato ai tempi $t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ (stimatore Monte Carlo

distorto) e (b) con una formula di rappresentazione che coinvolge solo il valore del sottostante a T (stimatore Monte Carlo non distorto [s.d.]).

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 2, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3]

Lezioni 49, 50, 51 - 09/12/2022

Opzioni con barriera: formule di "parità" per la validazione dei programmi. Opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di "parità" nel modello di Black-Scholes.
Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite (uso delle differenze finite centrate) e il metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.1.3, 3.1.4, 3.2]

Lezioni 52, 53, 54 - 13/12/2022

Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: le formule dei pesi *à la Malliavin*. Copertura dinamica.
Panoramica sui mercati obbligazionari: i modelli stocastici per i tassi di interesse (Vasicek, CIR) e le curve forward dei tassi (modello HJM).

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.2, 3.3; appunti sui tassi]