Diario delle lezioni di

Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari

a.a. 2021/2022

`www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_2122/mmmf.htm`

Lezione 0 - 05/10/2021
Introduzione al corso.

[cfr. Conferenza ScienzaOrienta "Numeri e dollari: probabilità e finanza"]

Lezioni 1, 2 - 08/10/2021
Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito. Introduzione al teorema di Girsanov.

[cfr. Baldi, Cap. 7, 8, Par. 12.1; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 3, 4, 5 - 12/10/2021
Risultati preliminari sulla "martingala esponenziale (complessa)". Il teorema di Girsanov. I teoremi di rappresentazione delle martingale browniane. Conseguenza 1 del teorema di rappresentazione delle martingale browniane: se $(M_t)_{t\in[0,T]}$ è una martingala locale browniana tale che $\sup_{t\le T}|M_t|$ è di quadrato integrabile allora $(M_t)_{t\in[0,T]}$ è una martingala browniana. e, a meno di una costante, si rappresenta come integrale stocastico di un processo in $M^2[0,T]$.

[cfr. Baldi, Par 12.1 e 12.3; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3 (vd esercizio 15, punto 1)]

Lezioni 6, 7, 8 - 15/10/2021
Conseguenza 2 del teorema di rappresentazione delle martingale browniane: caratterizzazione delle misure equivalenti a $\mathbb{P}$ su $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, dove $\mathcal{F}_T = \sigma(B_s,\, s \le T) \vee \mathcal{N}$ (B = browniano, $\mathcal{N}$ = insiemi di misura nulla).
Ancora richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema classico di esistenza ed unicità, stime in L^p, markovianità della soluzione, generatore infinitesimale).
Tassi di interesse. Il tasso istantaneo. Richiami: il moto browniano geometrico.
Il modello di Black e Scholes. Strategie di mercato e portafoglio associato. Definizione di strategie autofinanzianti.

[cfr. Baldi, Par 12.4 e Cap. 9; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3 e Cap. 4.]

Lezioni 9, 10, 11 - 19/10/2021
Interpretazione delle strategie autofinanzianti. Prezzo e portafoglio scontati. Strategie autofinanzianti e caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato. La misura "equivalente di martingala" o "di rischio neutro". Strategie ammissibili e replicanti. Il teorema

di replicabilità delle opzioni europee di quadrato integrabile sotto la misura di rischio neutro. Il prezzo e la copertura delle opzioni europee. Opzioni il cui payoff dipende dal sottostante a maturità: la funzione-prezzo. L'equazione alle derivate parziali per la funzione-prezzo ed il calcolo della copertura (strategia replicante).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 12, 13 - 22/10/2021
Le Greche di un'opzione. La formula di parità per opzioni call/put nel modello di Black e Scholes e le formule per il prezzo e per la copertura delle opzioni call e put.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 14, 15 - 26/10/2021
Il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo (con particolare attenzione alla scelta di ipotesi meno restrittive per le funzioni r_t, μ_t, σ_t).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 1]

Lezioni 16, 17 - 29/10/2021
Il modello di Garman-Kohlaghen (opzioni su valute).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 2]

Lezioni 18, 19, 20 - 02/11/2021
Opzioni di scambio su due sottostanti nel modello di Black e Scholes (bivariato). Opzione composta call su call (punti 1. e 2.).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 3 e 5]

Lezioni 21, 22, 23 - 05/11/2021
Opzione composta call su call (punti 3. e 4.). Opzione asiatica (parte I e punto 1. della parte II).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 5 e 7]

Lezioni 24, 25, 26 - 09/11/2021
Opzione asiatica (parte II e parte III). Strategie con consumo & volatilità stocastica (parte I e punti 1.–3. della parte II).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 7 e 4]

Lezioni 27, 28, 29 - 12/11/2021
Strategie con consumo & volatilità stocastica (punti 4.–8. della parte II).
Modelli generali (di Ito) per la finanza: il "rumore" descritto tramite un browniano in $\mathbb{R}^d$, il prezzo del titolo non rischioso con un tasso di interesse istantaneo aleatorio, i prezzi degli m titoli rischiosi descritti tramite processi di Ito. Le strategie autofinanzianti e la loro caratterizzazione usando il portafoglio scontato. Le strategie ammissibili e di arbitraggio. La misura equivalente di martingala $\mathbb{P}^*$: esistenza. Il moto browniano sotto $\mathbb{P}^*$. Dinamica dei prezzi scontati sotto una misura equivalente di martingala $\mathbb{P}^*$ e il sistema lineare per la determinazione della densità di $\mathbb{P}^*$ rispetto a $\mathbb{P}$.

[cfr. Baldi, Par. 13.4]

Lezioni 30, 31, 32 - 16/11/2021
Prezzo di "non arbitraggio" per un'opzione replicabile in presenza di una misura equivalente di martingala. Indipendenza del prezzo di un'opzione replicabile dalla misura equivalente di martingala rispetto alla quale è replicabile. Definizione di mercato completo ed unicità della misura equivalente di martingala in un mercato completo.
Il modello di diffusione per la descrizione dei mercati finanziari: definizione, richieste sui coefficienti del modello. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una misura equivalente di martingala.

[cfr. Baldi, Par. 13.4, 13.5]

Lezioni 33, 34, 35 - 19/11/2021
La condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l'esistenza (e l'eventuale unicità) della misura equivalente di martingala. Teorema classico di completezza del mercato. Breve discussione sui mercati non completi.

[cfr. Baldi, Par. 13.5, 13.6]

Lezioni 36, 37, 38 - 23/11/2021
Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare; la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo. La regolarità della funzione-prezzo di un'opzione europea di payoff dipendente dal prezzo dei titoli a maturità: legame con EDP paraboliche. Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante. La regolarità della funzione-prezzo come conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (forte) di una EDP parabolica con termine del secondo ordine uniformemente ellittico (cambio di variabile). EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): il teorema di esistenza ed unicità (s.d.).

[cfr. Baldi, Par. 13.6, 10.3]

Lezioni 39, 40, 41 - 23/11/2021
EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): la formula di rappresentazione per la soluzione. EDP paraboliche con problema di Cauchy su $\mathbb{R}^m$: il teorema di esistenza ed unicità (s.d.). La formula di Feynman-Kac per la rappresentazione delle soluzioni EDP paraboliche con problema di Cauchy su $\mathbb{R}^m$. La formula di Feynman-Kac nel caso di crescita esponenziale.

[cfr. Baldi, Par. 10.3, 10.4, 10.5]

Lezioni 32, 43, 44 - 30/11/2021
Uso della formula per determinare le condizioni sui coefficienti del modello e sulla funzione payoff affinché la funzione-prezzo sia una soluzione regolare dell'EDP parabolica associata. In particolare, calcolo della copertura tramite la formula di Ito. Cenni sulla soluzione fondamentale di un problema parabolico e legame con la densità di transizione: stime gaussiane ed equazione backward.
Metodi Monte Carlo: generalità. L'IC di output.

[cfr. Baldi, Par. 13.6; Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 1]

Lezioni 45, 46, 47 - 03/12/2021
Simulazione di v.a. gaussiane tramite il generatore di Box-Muller. Simulazione del moto browniano.
Simulazione del moto browniano geometrico. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard. Confronto con le formule esatte e studio empirico della velocità di convergenza al crescere del numero di simulazioni. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni asiatiche call/put standard. Uso delle formule di parità per la validazione del programma. Opzioni con barriera: valutazione numerica del prezzo con Monte Carlo tramite (a) approssimazione del sup su $[0, T]$ con il max osservato ai tempi $t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ (stimatore Monte Carlo distorto) e (b) con una formula di rappresentazione che coinvolge solo il valore del sottostante a T (stimatore Monte Carlo non distorto). Formule di "parità" per la validazione dei programmi.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 2, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3]

Lezioni 48, 49, 50 - 07/12/2021
Dimostrazione della formula di rappresentazione per opzioni con barriere. Opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di "parità" nel modello di Black-Scholes. Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite (uso delle differenze centrate) e il metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.1.4, 3.2.1, 3.2.2]

Lezioni 51, 52, 53 - 09/12/2021
Dimostrazione della formula di rappresentazione della delta come aspettazione di un'opportuna v.a. Copertura dinamica.
Il mercato obbligazionario: zero coupon bonds. L'importanza di un modello stocastico per la dinamica del tasso di interesse. L'EDS per r_t, $t \geq 0$, il titolo non rischioso B_t, $t \geq 0$, il prezzo $p(t, T)$ del bond a maturità T e l'ipotesi $p(t, T) = F^T(r_t, t)$, con F^T regolare. Il differenziale di $p(t, T)$ per $t \in [0, T]$ e la costruzione del portafoglio autofinanziante che ha lo stesso rendimento del titolo non rischioso.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.2.2, 3.3; appunti sui tassi, Par 1, 2.1]

Lezioni 54, 55, 56 - 14/12/2021
Il "risk premium" e la misura di rischio neutro. Proprietà di martingala dei prezzi scontati e l'"equazione di struttura" della funzione prezzo F^T. Espressione della funzione-prezzo nei modelli affini: $F^T(x, t) = \exp(A(t, T) - xB(t, T))$ e le equazioni differenziali (ordinarie) per il calcolo di $A(t, T)$ e $B(t, T)$. I modelli mean-reverting per il tasso istantaneo r. Il modello di Vasicek.

[cfr. Appunti sui tassi, Par 2.1, 2.2, 2.3; Lamberton e Lapeyre, Par. 6.2.1 (pag. 127)]

Lezioni 57, 58 - 16/12/2021
Il modello CIR. La curva dei tassi forward e il modello HJM: la dinamica in termini di processo di Ito del prezzo $p(t, T)$ dello zero coupon bond.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Par. 6.2.2 (pag. 129) e Par. 6.2.3 (pag. 133); appunti sui tassi, Par 3.1]

Lezioni 59, 60, 61, 62 - 21/12/2021
L'inversione "alla Fubini" dell'integrale misto Lebesgue/Browniano per dimostrare la dinamica di processo di Ito del prezzo del bond nel modello HJM. Il modello HJM "gaussiano" ($\sigma(t, s) \equiv \sigma > 0$): l'espressione della curva forward, del tasso istantaneo di interesse e dello zero-coupon bond. Le opzioni sul mercato obbligazionario. Le opzioni replicabili: prezzo e copertura. La call su bond: prezzo nei modelli affini, in particolare Vasicek e CIR, e nel modello HJM. Cambio di numerario e conseguente semplificazione dell'espressione del prezzo dell'opzione. Caso HJM gaussiano: espressione semplificata del prezzo della call su bond.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Par. 6.2.3 (pag. 133) e esercizio 38; appunti sui tassi, Par 3.1 e 3.2]

Lezioni 63, 64 - 13/01/2022
Seminario su metodi numerici alle differenze finite per l'approssimazione di soluzioni di EDP e applicazioni in finanza (con l;a collaborazione di Maya Briani, IAC-CNR, Roma).