

MMMF - METODI E MODELLI DEI MERCATI FINANZIARI
AA 2020/2021

INFORMAZIONI E PROGRAMMA DEL CORSO

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA PURA ED APPLICATA

DOCENTE: LUCIA CARAMELLINO¹

Informazioni sul corso

Prerequisiti

Per una buona preparazione all'esame è consigliato il corso EP/1-Elementi di Probabilità 1 (o comunque un corso su calcolo stocastico). Per quanto riguarda gli strumenti finanziari, una buona introduzione viene fatta in Probabilità e Finanza (consigliato ma non essenziale).

Modalità d'esame

L'esame consiste in una prova orale, che comprende anche una discussione sugli algoritmi di simulazione analizzati durante il corso. Gli studenti devono obbligatoriamente prenotarsi all'esame alla pagina ServiziOnLine (Deplhi) di Tor Vergata. I programmi con l'implementazione degli esercizi vanno consegnati al docente prima della data d'esame (su supporto elettronico, da consegnare a mano, oppure via e-mail a caramell@mat.uniroma2.it; qui di seguito sono elencati tutti gli esercizi richiesti). Si fa esplicita richiesta di utilizzare un linguaggio di programmazione (ad es. C, C++ etc., ma non Scilab o analoghi software), a scelta dello studente. Si richiede la consegna dei file sorgente e, nel caso di grafici, di file salvati in pdf. Gli studenti possono lavorare in gruppo. Prima della data d'esame (o meglio, della data del primo del gruppo che sosterrà l'esame), sarà preso un appuntamento dove gli studenti che hanno consegnato i programmi illustreranno al docente gli stessi.

Testi consigliati

- P. Baldi: *Stochastic Calculus. An Introduction Through Theory and Exercises*. Springer, Universitext, 2017.
- D. Lamberton, B. Lapeyre: *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman and Hall, 1996 (o versioni successive).
- Appunti su *Metodi Monte Carlo in Finanza* distribuiti dal docente.

¹Dipartimento di Matematica, Università di Roma “Tor Vergata”, email: caramell@mat.uniroma2.it; web: www.mat.uniroma2.it/~caramell

- D. Brigo, A. Dalessandro, M. Neugebauer, F. Triki: A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management, *Journal of Risk Management in Financial Institutions*, **2**(4), 2008-2009.
- D. Lamberton: *Optimal stopping and American options*. Ljubljana Summer School on Financial Mathematics, 2009.
- P. Glasserman: *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer-Verlag, 2004.
- Appunti su *Introduzione al Calcolo di Malliavin e applicazioni in Finanza* distribuiti dal docente.

Gli appunti si possono richiedere via email all'indirizzo `caramell@mat.uniroma2.it`

Programma

PARTE I: opzioni europee e metodi Monte Carlo

Richiami di calcolo stocastico

Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito. Il teorema di Girsanov. Il teorema di rappresentazione delle martingale Browniane. La caratterizzazione delle misure equivalenti su $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, dove $\mathcal{F}_T$ è la σ -algebra generata da un moto browniano e completata con gli insiemi di misura nulla. Richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema di esistenza ed unicità, stime in L^p , markovianità della soluzione).

[cfr. Baldi, Cap. 7, 8, 9 e 12.1, 12.3, 12.4; Lamberton e Lapeyre, Capitolo 3]

Il modello di Black e Scholes

Il modello di Black e Scholes. Strategie autofinanzianti, ammissibili, replicanti. Portafoglio replicabile. Prezzo delle opzioni europee. Le formule di Black e Scholes per il prezzo e la copertura di opzioni call/put. Alcuni problemi riconducibili al modello di Black e Scholes: il modello a coefficienti dipendenti dal tempo; il modello di Garman-Kohlhagen (opzioni su valute); opzioni di scambio; opzioni composte call su call; opzioni asiatiche.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Capitolo 4 e Problemi 1, 2, 3, 5, 7 al Cap. 4]

Modelli con rumore browniano per i mercati finanziari

Modelli di Ito per l'evoluzione dei prezzi in un mercato finanziario. Strategie autofinanzianti e ammissibili; misure di martingala equivalenti; arbitraggio; strategie replicanti. Completezza del mercato; prezzo di opzioni europee. Modelli di diffusione per i mercati finanziari: caratterizzazione della misura di martingala equivalente; la condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l'esistenza della misura equivalente di martingala (dimensione browniano $\geq$ numero di sottostanti e $\sigma\sigma^*$ uniformemente ellittica); teorema

classico di completezza del mercato. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea; le greche di un'opzione europea. Formule di rappresentazione per soluzioni di equazioni alle derivate parziali paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet) e paraboliche su $\mathbb{R}^m$ (problema di Cauchy); formula di Feynman-Kac. Connessioni con la finanza.

[cfr Baldi, Cap 13 e Par. 10.3, 10.4]

Metodi numerici per la finanza

Il metodo Monte Carlo: stima di medie ed intervallo di confidenza. Simulazione del moto Browniano e del moto Browniano geometrico. Metodi numerici per la finanza: uso del metodo Monte Carlo. In particolare, seguendo il modello di Black e Scholes, si richiede l'implementazione un programma per il:

- calcolo numerico del prezzo della call e della put, con intervallo di confidenza al 95% e studio numerico della convergenza del prezzo call/put alla formula di Black e Scholes (Ex 3.1 degli appunti);
- calcolo numerico del prezzo di una call asiatica, con intervallo di confidenza al 95% e con implementazione della formula di parità (Ex. 3.2 degli appunti);
- calcolo numerico del prezzo di un'opzione call con barriera superiore (up-and-in e up-and-out) usando sia lo stimatore approssimato sia lo stimatore non distorto, con intervallo di confidenza al 95% e formula di parità; sviluppare il programma al variare della barriera superiore (Ex. 3.4 degli appunti);
- calcolo numerico del prezzo di un'opzione di scambio e di una digital su due sottostanti, con intervallo di confidenza al 95% e formula di parità (Ex. 3.5 degli appunti);
- calcolo numerico della delta di un'opzione call con le differenze finite e tramite la rappresentazione delle derivate come opportune aspettative; studio numerico della convergenza, per $Q \rightarrow \infty$, alla delta calcolata con la formula esatta (Ex. 3.6 degli appunti);
- calcolo numerico della delta di opzioni digital e di scambio su due sottostanti, con le differenze finite e tramite la rappresentazione delle derivate come opportune aspettative (Ex. 3.7 degli appunti);
- calcolo della copertura dinamica di un'opzione call e uguaglianza finale con il *payoff* dell'opzione, sia con il calcolo esatto della delta (Ex. 3.8 degli appunti) e sia approssimando la delta con la tecnica Monte Carlo (differenze finite e formula di rappresentazione, Ex. 3.8 degli appunti).

[cfr appunti su *Metodi Monte Carlo in Finanza* o anche Glasserman]

PARTE II: tassi di interesse

Il mercato obbligazionario. Zero coupon bonds. L'importanza di un modello stocastico per la dinamica del tasso di interesse. L'ipotesi di rumore di mercato browniano. L'Ipotesi (H) e le conseguenze, in particolare: il market price of risk e il prezzo del bond come processo di Ito. Opzioni su bond. Strategie autofinanzianti e replicanti. Opzioni replicabili e teorema di "completezza". Modelli per il tasso di interesse: Vasicek e CIR; formula esplicita del prezzo dello zero coupon bond. Le curve forward dei tassi e il modello HJM: la dinamica del prezzo del bond e le condizioni di compatibilità con l'Ipotesi (H). Il modello HJM "gaussiano": espressione esplicita delle curve forward dei tassi, del tasso istantaneo e del prezzo dello zero coupon bond; la formula chiusa per il prezzo dell'opzione call su bond.

[cfr Lamberton e Lapeyre, Cap. 6, con esercizi 37 e 38]