Diario delle lezioni di
Probabilità e Finanza

a.a. 2020/2021

www.mat.uniroma2.it/~caramell/did.2021/pf.htm

01/10/2020 - Lezioni 1, 2

Introduzione al corso.

[cfr. Conferenza ScienzaOrienta “Numeri e dollari: probabilità e finanza”]

02/10/2020 - Lezioni 3, 4

Richiami: algebre e σ -algebre. Esercizi. La σ -algebra generata da una classe di sottoinsiemi. Esempi: $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ quando $\mathcal{C}$ è una σ -algebra; $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ quando $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$; la σ -algebra generata da una partizione al più numerabile. La σ -algebra di Borel. Le classi generatrici di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (intervalli aperti, semichiusi, chiusi, etc.). La classe $\pi(\mathbb{R}) = \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$ come classe che genera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Spazi misurabili e funzioni misurabili. La σ -algebra generata da una funzione misurabile e la sua caratterizzazione in termini di controimmagini.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.1, 2.1.2]

08/10/2020 - Lezioni 5, 6

Condizioni sufficienti per la verifica della misurabilità. Caso particolare per funzioni a valori reali. Funzioni discrete: definizione, misurabilità, la σ -algebra generata come una σ -algebra generata da una partizione numerabile. Proprietà delle funzioni misurabili: la classe delle funzioni misurabili come un'algebra; misurabilità della funzione composta di funzioni misurabili; misurabilità dell'inf, del sup etc. di una successione di funzioni misurabili.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.2]

09/10/2020 - Lezioni 7, 8

Proprietà delle funzioni misurabili: data una partizione $\mathcal{C}$ al più numerabile, se f è $\sigma(\mathcal{C})$ -misurabile allora f è costante su tutti gli elementi della partizione. Date due funzioni $\mathcal{S}$ -misurabili f e g , se g è $\sigma(f)$ -misurabile allora $g = h \circ f$, per un'opportuna funzione misurabile h (s.d.); se $\sigma(f) = \sigma(g)$ allora $f = h_1 \circ g$ e $g = h_1 \circ f$, con f, g, h_1, h_2 misurabili (s.d.).

Definizione di spazi di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Esempio: se $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ con $\mathcal{C}$ partizione al più numerabile di Ω allora $\mathbb{P}$ è perfettamente individuata dai valori $\mathbb{P}(C)$, al variare di $C \in \mathcal{C}$. Le proprietà generali della probabilità $\mathbb{P}$ e la proprietà di monotonia (richiami). Indipendenza tra eventi, legame con la proprietà di fattorizzazione sulle σ -algebre generate da questi eventi. La definizione di σ -algebre indipendenti. Esempio: quando le σ -algebre sono generate da partizioni al più numerabili basta provare la proprietà di fattorizzazione solo sugli elementi delle partizioni.

Definizione formale di v.a. Caso particolare: v.a. discrete, finite, a valori in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.2, 2.2, 2.3.1]

15/10/2020 - Lezioni 9, 10

La definizione di v.a. indipendenti in termini delle σ -algebre generate. Definizione di indipendenza tra una v.a. ed una σ -algebra. Le proprietà delle v.a. Definizione di legge di una v.a. V.a. discrete: densità discreta; densità discreta congiunta e calcolo delle marginali; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di densità; densità della somma; densità discreta condizionale. V.a. assolutamente continue (a.c.): densità continua; densità congiunta e calcolo delle marginali; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di densità; densità della somma.

[cfr. Appunti, Par. 2.3.1, 2.3.2]

16/10/2020 - Lezioni 11, 12

Speranza matematica: definizione per v.a. discrete o a.c. L'esistenza ed il calcolo della speranza matematica di $f(X)$ quando X è una v.a. discreta oppure a.c. La media di una v.a. discreta come somma su Ω (e non sullo spazio di arrivo). Richiami: le proprietà della speranza matematica (linearità, positività etc.); la media del prodotto di v.a. indipendenti che hanno media; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di fattorizzazione della speranza matematica ($X \perp\!\!\!\perp Y$ sse $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$ per ogni f, g boreliane tali che $f(X)$ e $g(Y)$ abbiano media); momento k -esimo, in particolare: se esiste il momento k -esimo allora esiste il momento p -esimo per ogni $p \leq k$; la varianza e il suo significato; le disuguaglianze di Markov, di Chebycev, di Schwarz. Introduzione alla speranza matematica condizionale: il caso di v.a. discrete.

[cfr. Appunti, Par. 2.3.3, 3.1.1]

22/10/2020 - Lezioni 13, 14

Introduzione alla speranza matematica condizionale: il caso di σ -algebra generata da una partizione finita di Ω , formata da insiemi con probabilità positiva. Definizione formale di $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$. Caso particolare: quando $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, quindi $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X | Y) = h_X(Y)$, con h_X funzione boreliana. Calcolo esplicito della funzione h_X quando (X, Y) ha densità congiunta discreta oppure continua.

Le proprietà della media condizionale: se $X = c$ q.c. allora $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = c$ q.c.; $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$; linearità, positività e monotonia della media condizionale; la disuguaglianza di Jensen per la media condizionale.

[cfr. Appunti, Par. 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3]

23/10/2020 - Lezioni 15, 16

Le proprietà della media condizionale: se X è $\mathcal{G}$ -misurabile allora $\mathbb{E}(XY | \mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y | \mathcal{G})$; se $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ sotto σ -algebre di $\mathcal{F}$ allora $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) | \mathcal{A})$; se $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ allora $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$; se X è $\mathcal{G}$ -misurabile e $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ allora $\mathbb{E}(f(X, Y) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(x, Y))|_{x=X}$; se X è di quadrato integrabile allora $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X | \mathcal{G})|^2) \leq \mathbb{E}(|X - Z|^2)$ per ogni v.a. Z di quadrato integrabile e $\mathcal{G}$ -misurabile (interpretazione: $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ è la "migliore" approssimazione di X nella classe delle v.a. $\mathcal{G}$ -misurabili e di quadrato integrabile).

Processi a tempo discreto. Filtrazioni, processi adattati. Definizione di martingala (mg), supermartingala (supermg) e submartingala (submg). Esempi di martingale, submartingale e supermartingale.

[cfr. Appunti, Par. 3.1.3, 3.2.1]

29/10/2020 - Lezioni 17, 18

Definizione equivalente per martingale. Le proprietà. La decomposizione di Doob e il compensatore. Esempio: data una $\mathcal{F}_n$ -martingala $(X_n)_n$ di quadrato integrabile, calcolo del compensatore di $(X_n^2)_n$. Le martingale trasformate. Le martingale multidimensionali.

[cfr. Appunti, Par. 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4]

30/10/2020 - Lezioni 19, 20

Caratterizzazione delle martingale in termini di martingale trasformate. Tempi d'arresto e σ -algebra degli eventi antecedenti: definizione e definizioni equivalenti. Esempio: il tempo di ingresso/di uscita di un processo adattato. Proprietà dei tempi d'arresto: se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora $\tau_1 \wedge \tau_2$ è un $\mathcal{F}_n$ -t.a.; se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$ -t.a. tali che $\tau_1 \leq \tau_2$ allora $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$; se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$; se $(X_n)_n$ è un processo $\mathcal{F}_n$ -adattato e τ è un $\mathcal{F}_n$ -t.a. finito allora X_τ è una v.a. $\mathcal{F}_\tau$ -misurabile.

[cfr. Appunti, Par. 3.2.4, 3.3]

05/11/2020 - Lezioni 21, 22

Se X è una v.a. integrabile e τ è un $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$, dove $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$, $n \geq 0$. Il processo arrestato $X_n^\tau = X_{\tau \wedge n}$: se $(X_n)_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -mg (risp. submg, supermg) e τ è un $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora $(X_n^\tau)_n$ rimane una $\mathcal{F}_n$ -mg (risp. submg, supermg). Il compensatore di una submg o supermg arrestata è il compensatore arrestato. Il teorema d'arresto.

Tassi di interesse: interesse composto, istantaneo. Qualche esercizio sui tassi.

[cfr. Appunti, Par. 3.3, Par. 1.1]

06/11/2020 - Lezioni 23, 24

Esercizio sui tassi: TAN e TAEG. Alcuni aspetti dei mercati finanziari: la vendita allo scoperto, l'arbitraggio. Le ipotesi di mercato. Il modello discreto per la descrizione dei mercati finanziari: la filtrazione, il processo $d + 1$ -dimensionale dei prezzi, il fattore di sconto ed il processo dei prezzi scontati. Strategie di gestione e portafoglio associato. Strategie autofinanzianti: definizione e definizioni equivalenti.

[cfr. Appunti, Par. 1.1, 1.2, 1.3; 4.1, 4.2, 4.3]

11/11/2020 - Lezioni 25, 26

Caratterizzazione delle strategie autofinanzianti in termini di scrittura del portafoglio e del portafoglio scontato. Dati un processo predicibile $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$ a valori in $\mathbb{R}^d$ e $V_0 \in \mathbb{R}$ esiste un unico processo predicibile $(\phi_n^0)_n$ tale che $(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$ sia una strategia autofinanziante. Strategie ammissibili e strategie di arbitraggio. Definizione di mercato privo di arbitraggio. Il cono convesso Γ ed il risultato tecnico (Lemma 4.4.3) che lega la mancanza di arbitraggio a Γ . Definizione di misure di probabilità equivalenti.

[cfr. Appunti, Par. 4.3, 4.4]

13/11/2020 - Lezioni 27, 28

Definizione di misura equivalente di martingala. Discussione sulla terminologia equivalente "misura di rischio neutro". Il primo teorema fondamentale dell'asset pricing. Conseguenze dell'esistenza della misura equivalente di martingala: la proprietà di martingala del portafoglio associato ad una strategia autofinanziante; una strategia autofinanziante che dà un portafoglio non negativo al tempo finale è anche ammissibile. La formula di parità call-put nei mercati privi di arbitraggio. Il modello binomiale a un periodo: caratterizzazione dell'esistenza (e dell'unicità) di una misura equivalente di martingala in termini della posizione del tasso rispetto ai due possibili salti.

[cfr. Appunti, Par. 4.4]

18/11/2020 - Lezioni 29, 30

Mancanza di arbitraggio nel modello trinomiale ad un periodo: studio dell'esistenza di una misura equivalente di martingala ed eventuale unicità. Definizione formale di un'opzione europea. Esempi: opzioni call, put, digital, asiatiche, con barriere. Opzioni replicabili e prezzo "di non arbitraggio". Completezza del mercato. Il secondo teorema fondamentale dell'asset pricing.

[cfr. Appunti, Par. 4.5]

20/11/2020 - Lezioni 31, 32

Completezza del modello binomiale ad un periodo e non completezza del modello trinomiale. Prezzo e copertura delle opzioni europee nei mercati completi. La formula di parità call-put con l'uso esplicito del prezzo (portafoglio replicante). Il modello di Cox, Ross e Rubinstein (CRR). Alcuni risultati preliminari per il teorema di completezza del modello CRR.

[cfr. Appunti, Par. 4.5, 4.6.1]

25/11/2020 - Lezioni 33, 34

Modello CRR: equivalenza tra mancanza di arbitraggio e la condizione $a < r < b$; completezza del mercato. Formula esplicita del prezzo e della strategia replicante per opzioni di payoff $h = F(S_N)$. Formula *backward* del prezzo di opzioni di payoff $h = F(S_N)$ nel modello CRR. Un esempio di applicazione.

[cfr. Appunti, Par. 4.6.1, 4.6.2]

27/11/2020 - Lezioni 35, 36

Uso pratico del modello CRR: suddivisione dell'intervallo $[0, T]$ in N sottointervalli, scelta del tasso ($r_N = RT/N$) e dei salti ($1 + a_N = (1 + r_N)e^{-\sigma\sqrt{T/N}}$ e $1 + b_N = (1 + r_N)e^{\sigma\sqrt{T/N}}$) in modo da costruire un mercato completo. La volatilità $\sigma > 0$. Comportamento asintotico, per $N \rightarrow \infty$, della funzione caratteristica di $\log \tilde{S}_N/S_0$ sotto la misura di rischio neutro. Convergenza in legge, per $N \rightarrow \infty$, di $\log S_N$ ad una normale di media $(R - \sigma^2/2)T$ e varianza $\sigma^2 T$. Le formule di Black e Scholes per il prezzo della call e della put come limite, per $N \rightarrow \infty$, del valore della call e della put nel modello CRR.

[cfr. Appunti, Par. 4.6.2, 4.6.3]

02/12/2020 - Lezioni 37, 38

Prezzo Black e Scholes di call/put come funzione crescente del parametro volatilità - interpretazione finanziaria. Esercizio al calcolatore: studio empirico (in scala logaritmica) della velocità di convergenza.

Opzioni americane nel modello generale, in ipotesi di completezza del mercato. Il processo-payoff. Gli istanti di esercizio come tempi d'arresto rispetto alla filtrazione di mercato. La formulazione "all'indietro" del prezzo dell'opzione americana. Payoff e prezzo scontati: formulazione "all'indietro" del prezzo scontato dell'opzione americana in termini del processo di payoff scontato. Il prezzo scontato dell'opzione americana come l'involuppo di Snell del processo di payoff scontato. Il tempo $\nu_0 = \inf\{n \geq 0 : \tilde{U}_n = \tilde{Z}_n\}$. Dimostrazione che $\nu_0 \in \mathcal{T}_{0,N}$ (cioè, è un $\mathcal{F}_n$ -t.a. a valori in $\{0, 1, \dots, N\}$).

[cfr. Appunti, Par. 4.6.4, 4.7, 5.1, 5.2]

04/12/2020 - Lezioni 39, 40

Proprietà di martingala per $(\tilde{U}_n^{\nu_0})_{0 \leq n \leq N}$ e ottimalità di ν_0 ($U_0 = \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_{\nu_0})$). Dimostrazione della proprietà $U_0 = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_\nu)$. Definizione formale di "istante di esercizio ottimale" e caratterizzazione matematica. Uso della decomposizione di Doob $\tilde{U}_n = \tilde{M}_n - \tilde{A}_n$, $n \leq N$, per determinare una strategia ammissibile ϕ tale che $V_\tau(\phi) = Z_\tau$ per ogni tempo ottimale di esercizio τ (copertura esatta delle opzioni americane). Il tempo di esercizio ottimale $\nu_1 = \inf\{n \geq 0 : \tilde{A}_{n+1} > 0\}$. La proprietà $\nu_1 \geq \nu_0$.

[cfr. Appunti, Par. 5.2, 5.3]

09/12/2020 - Lezioni 41, 42

Caratterizzazione degli istanti di esercizio ottimale come i tempi d'arresto compresi tra ν_0 e ν_1 in cui prezzo e payoff coincidono. Riscrittura di tutte le proprietà su un generico orizzonte temporale $[n, N]$,

$n = 0, 1, \dots, N$. Opzione europea associata e verifica del fatto che il prezzo dell'opzione americana è sempre maggiore od uguale al prezzo dell'europea associata. Opzione call: uguaglianza tra prezzo americano ed europeo. La funzione prezzo della put americana nel modello CRR: formulazione backward (dal principio di programmazione dinamica) e formulazione variazionale; le proprietà (continuità, monotonia e convessità) e discussione qualitativa del prezzo della put americana.

[cfr. Appunti, Par. 5.3, 5.4]

11/12/2020 - Lezioni 43, 44

Esercizio al calcolatore: implementazione del principio di programmazione dinamica e disegno della funzione $x \mapsto P_{am}(0, x)$.

Metodi Monte Carlo: generalità. L'intervallo di fiducia come output standard. Applicazione: calcolo numerico del prezzo di opzioni europee. Breve discussione sulla generazione al calcolatore di numeri a caso nell'intervallo $(0, 1)$. L'algoritmo KNUTH. Simulazione del modello CRR.

[cfr. Appunti, Par. 5.4, 6.1, 6.2, 6.3.1]

16/12/2020 - Lezioni 45, 46

Calcolo numerico del prezzo di call/put europee col metodo Monte Carlo: studio empirico della velocità di convergenza al valore esatto quando il numero di simulazioni Q tende a $+\infty$. Opzioni asiatiche: prezzo di call/put asiatiche europee con la tecnica Monte Carlo. Formule di parità per il prezzo dell'opzione call/put asiatica ed uso per la validazione del programma. Opzioni con barriere (up,down)&(in,out): calcolo del prezzo europeo con metodi Monte Carlo e formule di parità per la validazione del programma.

[cfr. Appunti, Par. 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3, 6.4]

18/12/2020 - Lezioni 47, 48

Copertura dinamica per opzioni europee. Put americana: simulazione del tempo ottimale di esercizio ν_0 . Calcolo del prezzo americano con Monte Carlo a partire dalla formula del prezzo come aspettazione del payoff scontato al tempo ν_0 . Copertura dinamica della put americana: il portafoglio che replica esattamente il payoff americano nell'istante di esercizio ν_0 .

[cfr. Appunti, Par. 6.4, 6.5]