Diario delle lezioni di

Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari

a.a. 2020/2021

`www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_2021/mmmf.htm`

Lezioni 1, 2, 3 - 08/10/2020
Introduzione al corso.

[cfr. Conferenza ScienzaOrienta "Numeri e dollari: probabilità e finanza"]

Lezioni 4, 5, 6 - 09/10/2020
Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito. Introduzione al teorema di Girsanov. Risultati preliminari sulla "martingala esponenziale (complessa)".

[cfr. Baldi, Cap. 7, 8, Par. 12.1; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 7, 8, 9 - 15/10/2020
Il teorema di Girsanov. I teoremi di rappresentazione delle martingale browniane.

[cfr. Baldi, Par 12.1 e 12.3; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 10, 11, 12 - 16/10/2020
Conseguenze del teorema di rappresentazione delle martingale browniane: 1) caratterizzazione delle misure equivalenti su $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, dove $\mathcal{F}_T = \sigma(B_s,\ s \leq T) \vee \mathcal{N}$ (B = browniano, $\mathcal{N}$ = insiemi di misura nulla); 2) se $(M_t)_{t\in[0,T]}$ è una martingala locale browniana tale che $\sup_{t\leq T} |M_t|$ è di quadrato integrabile allora $(M_t)_{t\in[0,T]}$ è una martingala browniana. e, a meno di una costante, si rappresenta come integrale stocastico di un processo in $M^2[0,T]$.
Ancora richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema classico di esistenza ed unicità, stime in L^p, markovianità della soluzione, generatore infinitesimale).

[cfr. Baldi, Par 12.4 e Cap. 9; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3 (vd esercizio 15, punto 1) e Cap. 4.]

Lezioni 13, 14, 15 - 22/10/2020
Tassi di interesse. Il tasso istantaneo. Richiami: il moto browniano geometrico.
Il modello di Black e Scholes. Strategie di mercato e portafoglio. Prezzo e portafoglio scontati.
Strategie autofinanzianti: caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato.
La misura "equivalente di martingala" o "di rischio neutro".

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 16, 17, 18 - 27/10/2020
Strategie ammissibili e replicanti. Il teorema di replicabilità delle opzioni europee di quadrato integrabile sotto la misura di rischio neutro. Il prezzo e la copertura delle opzioni europee. Opzioni il cui payoff dipende dal sottostante a maturità: la funzione-prezzo. L'equazione alle derivate parziali per la funzione-prezzo ed il calcolo della copertura (strategia replicante). Le Greche di un'opzione.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezione 19 - 29/10/2020
La formula di Black e Scholes per il prezzo e la copertura delle opzioni call. La formula di parità per opzioni call/put e la formula per il prezzo e la copertura delle opzioni put.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezione 20, 21, 22 - 05/11/2020
Il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo. Opzioni di scambio su due sottostanti nel modello di Black e Scholes (parte I e punti 1. e 2. della parte II).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 1 e 3]

Lezione 23, 24, 25 - 06/11/2020
Opzioni di scambio su due sottostanti nel modello di Black e Scholes (conclusione del problema). Il modello di Garman-Kohlhagen per opzioni su valuta estera (parte I e parte II fino al punto 4. incluso).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 3 e 2]

Lezione 26, 27, 28 - 12/11/2020
Il modello di Garman-Kohlhagen per opzioni su valuta estera (conclusione del problema). Opzione composta call su call.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 2 e 5]

Lezione 29, 30, 31 - 13/11/2020
Opzione call asiatica.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 7]

Lezioni 32, 33, 34 - 19/11/2020
Modelli generali (di Ito) per la finanza: il "rumore" descritto tramite un browniano in $\mathbb{R}^d$, il prezzo del titolo non rischioso con un tasso di interesse istantaneo aleatorio, i prezzi degli m titoli rischiosi descritti tramite processi di Ito. Le strategie autofinanzianti e la loro caratterizzazione usando il portafoglio scontato. Le strategie ammissibili e di arbitraggio. La misura equivalente di martingala $\mathbb{P}^*$: esistenza. Il moto browniano sotto $\mathbb{P}^*$. Dinamica dei prezzi scontati sotto una misura equivalente di martingala $\mathbb{P}^*$ e il sistema lineare per la determinazione della densità di $\mathbb{P}^*$ rispetto a $\mathbb{P}$. Le proprietà di martingala del portafoglio scontato associato a strategie autofinanzianti e ammissibili. Definizione di opzione europea. Opzioni replicabili e valore del portafoglio replicante.

[cfr. Baldi, Par. 13.4]

Lezioni 35, 36, 37 - 20/11/2020
Prezzo di "non arbitraggio" per un'opzione replicabile in presenza di una misura equivalente di martingala. Indipendenza del prezzo dalla misura equivalente di martingala. Definizione di mercato completo ed unicità della misura equivalente di martingala in un mercato completo.
Il modello di diffusione per la descrizione dei mercati finanziari: definizione, richieste sui coefficienti del modello. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una misura equivalente di martingala.

[cfr. Baldi, Par. 13.4, 13.5]

Lezioni 38, 39, 40 - 26/11/2020
La condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l'esistenza (e l'eventuale unicità) della misura equivalente di martingala. Teorema classico di completezza del mercato. Breve discussione sui mercati non completi.

[cfr. Baldi, Par. 13.5, 13.6]

Lezioni 41, 42, 43 - 27/11/2020
Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare; la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo. La regolarità della funzione-prezzo di un'opzione europea di payoff dipendente dal prezzo dei titoli a maturità: legame con EDP paraboliche. Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante. La regolarità della funzione-prezzo come conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (forte) di una EDP parabolica con termine del secondo ordine uniformemente ellittico (cambio di variabile). EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): il teorema di esistenza ed unicità (s.d.).

[cfr. Baldi, Par. 13.6, 10.3]

Lezioni 44, 45, 46 - 03/12/2020
EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): la formula di rappresentazione per la soluzione. EDP paraboliche con problema di Cauchy su $\mathbb{R}^m$: il teorema di esistenza ed unicità (s.d.). La formula di Feynman-Kac per la rappresentazione delle soluzioni EDP paraboliche con problema di Cauchy su $\mathbb{R}^m$.

[cfr. Baldi, Par. 10.3, 10.4]

Lezioni 47, 48, 49 - 04/12/2020
La formula di Feynman-Kac nel caso di crescita esponenziale. Uso della formula per determinare le condizioni sui coefficienti del modello e sulla funzione payoff affinché la funzione-prezzo sia una soluzione regolare dell'EDP parabolica associata. In particolare, calcolo della copertura tramite la formula di Ito. Cenni sulla soluzione fondamentale di un problema parabolico e legame con la densità di transizione: stime gaussiane ed equazione backward.
Metodi Monte Carlo: generalità. L'IC di output. Simulazione di v.a. gaussiane tramite il generatore di Box-Muller. Simulazione del moto browniano.

[cfr. Baldi, Par. 10.4, 10.5, 13.6; Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 1, 2]

Lezioni 50, 51, 52 - 10/12/2020
Simulazione del moto browniano geometrico. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard. Confronto con le formule esatte e studio empirico della velocità di convergenza al crescere del numero di simulazioni. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni asiatiche call/put standard. Uso delle formule di parità per la validazione del programma. Opzioni con barriera: valutazione numerica del prezzo con Monte Carlo tramite (a) approssimazione del tempo di uscita con il tempo di uscita della traiettoria discretizzata (stimatore Monte Carlo distorto) e (b) con una formula di rappresentazione che coinvolge solo il valore del sottostante a T (stimatore Monte Carlo non distorto). Formule di "parità" per la validazione dei programmi.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 2, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3]

Lezioni 53, 54, 55 - 11/12/2020
Dimostrazione della formula di rappresentazione per opzioni con barriere. Opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di "parità" nel modello di Black-Scholes. Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite (uso delle differenze centrate) e il metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.1.4, 3.2.1, 3.2.2]

Lezioni 56, 57, 58 - 17/12/2020
Dimostrazione della formula di rappresentazione della delta come aspettazione di un'opportuna v.a. Copertura dinamica.
Il mercato obbligazionario. Zero coupon bonds. L'importanza di un modello stocastico per la dinamica del tasso di interesse. L'ipotesi di rumore di mercato browniano. L'Ipotesi (H) e le conseguenze, in particolare: il market price of risk e il prezzo del bond come processo di Ito.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.2.2, 3.3; Lamberton e Lapeyre, Par. 6.1.2]

Lezioni 59, 60, 61 - 18/12/2020
Opzioni su bond. Strategie autofinanzianti e replicanti. Opzioni replicabili e teorema di "completezza". Modelli per il tasso di interesse: Vasicek e CIR. Formula esplicita del prezzo dello zero coupon bond.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Par. 6.1.3, 6.2.1, 6.2.2]