

**Diario delle lezioni di**  
**Probabilità e Finanza**

**a.a. 2019/2020**

[www.mat.uniroma2.it/~caramell/did\\_1920/pf.htm](http://www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1920/pf.htm)

**02/10/2019 - Lezioni 1, 2**

Introduzione al corso. Richiami: algebre e  $\sigma$ -algebre. Esercizi. La  $\sigma$ -algebra generata da una classe di sottoinsiemi. Esempi:  $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$  quando  $\mathcal{C}$  è una  $\sigma$ -algebra;  $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$  quando  $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ ; la  $\sigma$ -algebra generata da una partizione al più numerabile.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.1]

**04/10/2019 - Lezioni 3, 4**

La  $\sigma$ -algebra di Borel. Le classi generatrici di  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  (intervalli aperti, semichiusi, chiusi, etc.). La classe  $\pi(\mathbb{R}) = \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$  come classe che genera  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Spazi misurabili e funzioni misurabili. La  $\sigma$ -algebra generata da una funzione misurabile e la sua caratterizzazione in termini di controimmagini. Condizioni sufficienti per la verifica della misurabilità. Caso particolare per funzioni a valori reali.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.1, 2.1.2]

**09/10/2019 - Lezioni 5, 6**

Funzioni discrete: definizione, misurabilità, la  $\sigma$ -algebra generata come una  $\sigma$ -algebra generata da una partizione numerabile. Proprietà delle funzioni misurabili: la classe delle funzioni misurabili come un'algebra; misurabilità della funzione composta di funzioni misurabili; misurabilità dell'inf, del sup etc. di una successione di funzioni misurabili. Proprietà delle funzioni misurabili: data una partizione  $\mathcal{C}$  al più numerabile, se  $f$  è  $\sigma(\mathcal{C})$ -misurabile allora  $f$  è costante su tutti gli elementi della partizione. Date due funzioni  $\mathcal{S}$ -misurabili  $f$  e  $g$ , se  $g$  è  $\sigma(f)$ -misurabile allora  $g = h \circ f$ , per un'opportuna funzione misurabile  $h$  (s.d.); se  $\sigma(f) = \sigma(g)$  allora  $f = h_1 \circ g$  e  $g = h_2 \circ f$ , con  $f, g, h_1, h_2$  misurabili (s.d.). Definizione di uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Esempio: se  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$  con  $\mathcal{C}$  partizione al più numerabile di  $\Omega$  allora  $\mathbb{P}$  è perfettamente individuata dai valori  $\mathbb{P}(C)$ , al variare di  $C \in \mathcal{C}$ .

[cfr. Appunti, Par. 2.1.2, 2.2]

**16/10/2019 - Lezioni 7, 8**

Le proprietà generali della probabilità  $\mathbb{P}$  e la proprietà di monotonia (richiami). Indipendenza tra eventi, legame con la proprietà di fattorizzazione sulle  $\sigma$ -algebre generate da questi eventi. La definizione di  $\sigma$ -algebre indipendenti. Esempio: quando le  $\sigma$ -algebre sono generate da partizioni al più numerabili basta provare la proprietà di fattorizzazione solo sugli elementi delle partizioni. Definizione formale di v.a. Caso particolare: v.a. discrete, finite, a valori in  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . La definizione di v.a. indipendenti in termini delle  $\sigma$ -algebre generate. Definizione di indipendenza tra una v.a. ed una  $\sigma$ -algebra.

[cfr. Appunti, Par. 2.2, 2.3.1]

### 18/10/2019 - Lezioni 9, 10

Le proprietà delle v.a. Definizione di legge di una v.a. V.a. discrete: densità discreta; densità discreta congiunta e calcolo delle marginali; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di densità; densità della somma; densità discreta condizionale. V.a. assolutamente continue (a.c.): densità continua; densità congiunta e calcolo delle marginali; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di densità; densità della somma.

[cfr. Appunti, Par. 2.3.1, 2.3.2]

### 23/10/2019 - Lezioni 11, 12

Speranza matematica: definizione per v.a. discrete o a.c. L'esistenza ed il calcolo della speranza matematica di  $f(X)$  quando  $X$  è una v.a. discreta oppure a.c. La media di una v.a. discreta come somma su  $\Omega$  (e non sullo spazio di arrivo). Richiami: le proprietà della speranza matematica (linearità, positività etc.); la media del prodotto di v.a. indipendenti che hanno media; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di fattorizzazione della speranza matematica ( $X \perp\!\!\!\perp Y$  sse  $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$  per ogni  $f, g$  boreliane tali che  $f(X)$  e  $g(Y)$  abbiano media); momento  $k$ -esimo, in particolare: se esiste il momento  $k$ -esimo allora esiste il momento  $p$ -esimo per ogni  $p \leq k$ ; la varianza e il suo significato; le disuguaglianze di Markov, di Chebycev, di Schwarz, di Jensen. Introduzione alla speranza matematica condizionale: il caso di v.a. discrete.

[cfr. Appunti, Par. 2.3.3, 3.1.1]

### 25/10/2019 - Lezioni 13, 14

Introduzione alla speranza matematica condizionale: il caso di  $\sigma$ -algebra generata da una partizione finita di  $\Omega$ , formata da insiemi con probabilità positiva. Definizione formale di  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ . Caso particolare: quando  $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ , quindi  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X | Y) = \Psi_X(Y)$ , con  $\Psi_X$  funzione boreliana. Il formalismo " $\mathbb{E}(X | Y = y)$ ". Calcolo esplicito della funzione  $\Psi_X$  quando  $Y$  è discreta oppure quando  $(X, Y)$  ha densità (congiunta) continua.

[cfr. Appunti, Par. 3.1.1, 3.1.2]

### 30/10/2019 - Lezioni 15, 16

Le proprietà della media condizionale: se  $X = c$  q.c. allora  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = c$  q.c.;  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$ ; linearità, positività e monotonia della media condizionale; la disuguaglianza di Jensen per la media condizionale; se  $X$  è  $\mathcal{G}$ -misurabile allora  $\mathbb{E}(XY | \mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y | \mathcal{G})$ ; se  $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$  sotto  $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{F}$  allora  $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) | \mathcal{A})$ ; se  $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$  allora  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ ; se  $X$  è  $\mathcal{G}$ -misurabile e  $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$  allora  $\mathbb{E}(f(X, Y) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(x, Y))|_{x=X}$ ; se  $X$  è di quadrato integrabile allora  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X | \mathcal{G}))^2 \leq \mathbb{E}((X - Z)^2)$  per ogni v.a.  $Z$  di quadrato integrabile e  $\mathcal{G}$ -misurabile.

[cfr. Appunti, Par. 3.1.3]

### 06/11/2019 - Lezioni 17, 18

Processi a tempo discreto. Filtrazioni, processi adattati. Definizione di martingala (mg), supermartingala (supermg) e submartingala (submg). Esempi di martingale, submartingale e supermartingale. Le proprietà.

[cfr. Appunti, Par. 3.2.1, 3.2.2]

### 08/11/2019 - Lezioni 19, 20

La decomposizione di Doob e il compensatore. Esempio: data una  $\mathcal{F}_n$ -martingala  $(X_n)_n$  di quadrato integrabile, calcolo del compensatore di  $(X_n^2)_n$ . Le martingale trasformate. Tempi d'arresto e  $\sigma$ -algebra degli eventi antecedenti: definizione e definizioni equivalenti. Esempio: il tempo di ingresso/di uscita di un processo adattato.

[cfr. Appunti, Par. 3.2.3, 3.2.4, 3.3]

### 13/11/2019 - Lezioni 21, 22

Proprietà dei tempi d'arresto: se  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono  $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora  $\tau_1 \wedge \tau_2$  è un  $\mathcal{F}_n$ -t.a.; se  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono  $\mathcal{F}_n$ -t.a. tali che  $\tau_1 \leq \tau_2$  allora  $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$ ; se  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono  $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora  $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$ ; se  $(X_n)_n$  è un processo  $\mathcal{F}_n$ -adattato e  $\tau$  è un  $\mathcal{F}_n$ -t.a. finito allora  $X_\tau$  è una v.a.  $\mathcal{F}_\tau$ -misurabile; se  $X$  è una v.a. integrabile e  $\tau$  è un  $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$ , dove  $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ ,  $n \geq 0$ . Il processo arrestato  $X_n^\tau = X_{\tau \wedge n}$ : se  $(X_n)_n$  è una  $\mathcal{F}_n$ -mg (risp. submg, supermg) e  $\tau$  è un  $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora  $(X_n^\tau)_n$  rimane una  $\mathcal{F}_n$ -mg (risp. submg, supermg). Il compensatore di una submg o supermg arrestata è il compensatore arrestato. Il teorema d'arresto.

[cfr. Appunti, Par. 3.2.4, 3.3]

### 15/11/2019 - Lezioni 23, 24

Le martingale multidimensionali. L'orizzonte temporale finito.

Tassi di interesse: interesse composto, istantaneo. Esercizi sui tassi, TAN e TAEG. Alcuni aspetti dei mercati finanziari: la vendita allo scoperto; le ipotesi di mercato; l'arbitraggio.

[cfr. Appunti, Par. 1.1, 1.2]

### 20/11/2019 - Lezioni 25, 26

Generalità sui prodotti derivati. Contratti forward: valutazione di "non arbitraggio" del prezzo forward (prezzo di consegna). Le opzioni di acquisto (call) e di vendita (put). Le opzioni come strumenti finanziari per la gestione dei rischi. Il payoff dell'opzione call/put. Il problema del prezzo e della copertura dell'opzione.

Il modello discreto per la descrizione dei mercati finanziari: la filtrazione, il processo  $d+1$ -dimensionale dei prezzi, il fattore di sconto ed il processo dei prezzi scontati. Strategie di gestione e portafoglio associato. Strategie autofinanzianti: definizione e definizioni equivalenti.

[cfr. Appunti, Par. 1.3; 4.1, 4.2, 4.3]

### 22/11/2019 - Lezioni 27, 28

Caratterizzazione delle strategie autofinanzianti in termini di scrittura del portafoglio e del portafoglio scontato. Dati un processo predicibile  $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$  a valori in  $\mathbb{R}^d$  e  $V_0 \in \mathbb{R}$  esiste un unico processo predicibile  $(\phi_n^0)_n$  tale che  $(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$  sia una strategia autofinanziante. Strategie ammissibili e strategie di arbitraggio. Definizione di mercato privo di arbitraggio. Il cono convesso  $\Gamma$  ed il risultato tecnico (Lemma 4.4.3) che lega la mancanza di arbitraggio a  $\Gamma$ .

[cfr. Appunti, Par. 4.3, 4.4]

### 27/11/2019 - Lezioni 29, 30

Definizione di misura equivalente di martingala. Il primo teorema fondamentale dell'asset pricing. Conseguenze dell'esistenza della misura equivalente di martingala: la proprietà di martingala del portafoglio associato ad una strategia autofinanziante; la formula di parità call-put.

[cfr. Appunti, Par. 4.4]

### 04/12/2019 - Lezioni 31, 32

La formula di parità call-put nei mercati privi di arbitraggio. Mancanza di arbitraggio nel modello binomiale e del modello trinomiale ad un periodo: studio dell'esistenza di una misura equivalente di martingala ed eventuale unicità. Definizione formale di un'opzione europea. Esempi: opzioni call, put, digital, asiatiche, con barriere. Opzioni replicabili e prezzo "di non arbitraggio". Completezza del mercato. Enunciato del secondo teorema fondamentale dell'asset pricing. Esempio: in mancanza di arbitraggio, completezza del modello binomiale ad un periodo e non completezza del modello trinomiale.

[cfr. Appunti, Par. 4.4, 4.5]

### 06/12/2019 - Lezioni 33, 34

Dimostrazione del secondo teorema fondamentale dell'asset pricing. La formula di parità call-put con l'uso esplicito del prezzo (portafoglio replicante). Il modello CRR (Cox, Ross e Rubinstein): definizione, proprietà.

[cfr. Appunti, Par. 4.5, 4.6.1]

### 11/12/2019 - Lezioni 35, 36

Modello CRR: equivalenza tra mancanza di arbitraggio e la condizione  $a < r < b$ ; completezza del mercato. Formula esplicita del prezzo e della strategia replicante per opzioni di payoff  $h = F(S_N)$ .

[cfr. Appunti, Par. 4.6.1, 4.6.2]

### 18/12/2019 - Lezioni 37, 38

Formula *backward* del prezzo di opzioni si payoff  $h = F(S_N)$  nel modello CRR. Uso pratico del modello CRR: suddivisione dell'intervallo  $[0, T]$  in  $N$  sottointervalli, scelta del tasso ( $r_N = RT/N$ ) e dei salti ( $1+a_N = (1+r_N)e^{-\sigma\sqrt{T/N}}$  e  $1+b_N = (1+r_N)e^{\sigma\sqrt{T/N}}$ ) in modo da costruire un mercato completo. La volatilità  $\sigma > 0$ . Comportamento asintotico, per  $N \rightarrow \infty$ , della funzione caratteristica di  $\log \tilde{S}_N^N/S_0$  sotto la misura di rischio neutro. Convergenza in legge, per  $N \rightarrow \infty$ , di  $\log S_N^N$  ad una normale di media  $(r - \sigma^2/2)T$  e varianza  $\sigma^2T$ .

[cfr. Appunti, Par. 4.6.2, 4.6.3]

### 18/12/2019 - Lezioni 39, 40

Le formule di Black e Scholes per il prezzo della call e della put come limite, per  $N \rightarrow \infty$ , del valore della call e della put nel modello CRR. Prezzo Black e Scholes di call/put come funzione crescente del parametro volatilità - interpretazione finanziaria. Esercizio al calcolatore: studio empirico (in scala logaritmica) della velocità di convergenza.

Opzioni americane nel modello generale, in ipotesi di completezza del mercato. Il processo-payoff. Gli istanti di esercizio come tempi d'arresto rispetto alla filtrazione di mercato. La formulazione "all'indietro" del prezzo dell'opzione americana.

[cfr. Appunti, Par. 4.6.3, 4.6.4, 4.7, 5.1, 5.2]

### 08/01/2020 - Lezioni 41, 42

Payoff e prezzo scontati: formulazione "all'indietro" del prezzo scontato dell'opzione americana in termini del processo di payoff scontato. Il prezzo scontato dell'opzione americana come l'involuppo di Snell del processo di payoff scontato. Il tempo  $\nu_0 = \inf\{n \geq 0 : \tilde{U}_n = \tilde{Z}_n\}$ : proprietà di martingala per  $(\tilde{U}_n^{\nu_0})_{0 \leq n \leq N}$  e ottimalità di  $\nu_0$  ( $U_0 = \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_{\nu_0})$ ). Dimostrazione della proprietà  $U_0 = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_\nu)$ . Definizione formale di "istante di esercizio ottimale" e caratterizzazione matematica. Uso della decomposizione di Doob per determinare una strategia ammissibile  $\phi$  tale che  $V_\tau(\phi) = Z_\tau$  per ogni tempo ottimale di esercizio  $\tau$  (copertura esatta delle opzioni americane).

[cfr. Appunti, Par. 5.2, 5.3]

### 10/01/2020 - Lezioni 43, 44

Il tempo di esercizio ottimale  $\nu_* = \inf\{n \geq 0 : \tilde{A}_{n+1} > 0\}$ . Caratterizzazione degli istanti di esercizio ottimale come i tempi d'arresto compresi tra  $\nu_0$  e  $\nu_*$  in cui prezzo e payoff coincidono. Opzione europea associata e verifica del fatto che il prezzo dell'opzione americana è sempre maggiore od uguale al prezzo dell'europea associata. Opzione call: uguaglianza tra prezzo americano ed europeo. La formulazione backward della funzione prezzo della put americana nel modello CRR.

[cfr. Appunti, Par. 5.3, 5.4]

**15/01/2020 - Lezioni 45, 46**

Le proprietà (continuità, monotonia e convessità) e discussione qualitativa del prezzo della put americana. Esercizio al calcolatore: implementazione del principio di programmazione dinamica e disegno della funzione  $x \mapsto P_{am}(0, x)$ .

Metodi Monte Carlo: generalità. L'intervallo di fiducia come output standard. Applicazione: calcolo del prezzo di opzioni. Breve discussione sulla generazione al calcolatore di numeri a caso nell'intervallo  $(0, 1)$ . L'algoritmo KNUETH. Simulazione del modello CRR. Stima del prezzo di call/put standard con il metodo Monte Carlo.

[cfr. Appunti, Par. 5.4, 6.1, 6.2, 6.3.1]

**17/01/2020 - Lezioni 47, 48**

Prezzo di call/put col metodo Monte Carlo: studio empirico della velocità di convergenza al valore esatto quando il numero di simulazioni tende a  $+\infty$ . Opzioni asiatiche: prezzo di call/put asiatiche con la tecnica Monte Carlo. Formule di parità per il prezzo dell'opzione call/put asiatica ed uso per la validazione del programma. Opzioni con barriere (up,down)&(in,out): calcolo del prezzo con metodi Monte Carlo e formule di parità per la validazione del programma. Copertura dinamica per opzioni europee.

[cfr. Appunti, Par. 6.3.2, 6.3.3, 6.4]