Tutorato VIII
Probabilità e Statistica
a.a. 2015/2016

Argomenti: funzioni caratteristiche; leggi gaussiane multivariate.

Esercizio 1. Presa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, siano $\bar{\varphi}$ la funzione coniugata e $|\varphi|^2$ la funzione modulo (complesso) al quadrato.
Dimostrare che se $\varphi(t)$ è una funzione caratteristica allora anche $\bar{\varphi}(t)$, $\varphi^2(t)$ e $|\varphi|^2(t)$ sono funzioni caratteristiche. Equivalentemente: se $\varphi(t)$ denota la funzione caratteristica di una v.a. X, cioè $\varphi_X(t) = \varphi(t)$, esibire tre v.a. Y, Z e W con funzione caratteristica data da $\varphi_Y(t) = \bar{\varphi}(t)$, $\varphi_Z(t) = \varphi^2(t)$ e $\varphi_W(t) = |\varphi|^2(t)$ rispettivamente.

Esercizio 2. Sia $\varphi(t)$ la funzione caratteristica di una v.a. X su $\mathbb{R}$ dotata di momento secondo. Dimostrare che si ha sempre $\varphi'(0)^2 \geq \varphi''(0)$.

[Sugg.: ricordare il legame tra funzioni caratteristiche e momenti...]

Esercizio 3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio su $\mathbb{R}^2$ con densità continua

$$f_{X,Y}(x, y) = ce^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y>x>0}.$$

a) Calcolare c e, se esiste, $\mathbb{E}(XY)$.

b) Calcolare la funzione caratteristica $\varphi_{X,Y}$ di (X, Y).

c) Usando la funzione caratteristica $\varphi_{X,Y}$, calcolare $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

[Sugg.: ricordare il legame tra funzioni caratteristiche e momenti...]

d) Calcolare la funzione caratteristica $\varphi_{U,V}$ di $U = X$ e $V = Y - X$. U e V sono indipendenti?

e) Calcolare la densità congiunta di $U = X$ e $V = Y - X$ usando dapprima il punto **d)** e poi usando il TCV.

Esercizio 4. Sia $X = (X_1, \dots, X_d)$ una v.a. su $\mathbb{R}^d$ di legge $\mathrm{N}(\mu, C)$, con $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \mathrm{Mat}(d \times d)$ simmetrica e semidefinita positiva. Dunque,

$$\varphi_X(\theta) = e^{i\langle\theta,\mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\theta,\theta\rangle}, \quad \theta \in \mathbb{R}^d.$$

a) Dimostrare che ciascuna componente X_k del vettore X ha legge gaussiana su $\mathbb{R}$, di media e varianza da precisare.

b) Dimostrare che se C è una matrice diagonale allora le coordinate $X_1, \dots, X_d$ sono v.a. indipendenti.

c) Dimostrare il seguente risultato più generale.

Supponiamo che C sia una matrice a blocchi del tipo

$$C = \begin{pmatrix} \bar{C} & O \\ O^* & \hat{C} \end{pmatrix}$$

con $\bar{C} \in \mathrm{Mat}(k \times k)$, $\hat{C} \in \mathrm{Mat}((d-k) \times (d-k))$, $O \in \mathrm{Mat}(k \times (d-k))$, dove $1 \le k < d$ e O è una matrice nulla. Provare che i sottovettori aleatori $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ e $\hat{X} = (X_{k+1}, \ldots, X_d)$ sono indipendenti e gaussiani rispettivamente su $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{d-k}$.

[Sugg.: basta far vedere che la f.c. della coppia $(\bar{X}, \hat{X})$ si fattorizza nel prodotto delle f.c.: $\varphi_{\bar{X},\hat{X}}(\bar{\theta}, \hat{\theta}) = \varphi_{\bar{X}}(\bar{\theta})\varphi_{\hat{X}}(\hat{\theta})$, per ogni $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^k$ e $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{d-k}$.]

Esercizio 5. In questo esercizio ci proponiamo di dimostrare il seguente risultato di algebra lineare:

Proposizione 1. *Sia* $\odot : \mathrm{Mat}(n \times n) \times \mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ *il prodotto tra matrici definito da*

$$(A \odot B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n).$$

Dimostrare che se A e B sono simmetriche e semidefinite positive allora $A \odot B$ è simmetrica e semidefinita positiva.

Useremo una tecnica probabilistica. Per tale motivo, siano $\bar{C}, \hat{C} \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ matrici simmetriche e semidefinite positive e sia $C \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n)$ definita da

$$C = \begin{pmatrix} \bar{C} & O \\ O & \hat{C} \end{pmatrix}$$

dove $O \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ denota la matrice nulla.

a) Dimostrare che C è simmetrica e semidefinita positiva.

Sia X una v.a. su $\mathbb{R}^{2n}$ tale che $X \sim \mathrm{N}(0, C)$. Definiamo $\bar{X}$ il vettore delle prime n componenti di X e $\hat{X}$ il vettore delle rimanenti componenti, cioè

$$\bar{X}_i = X_i \quad \text{e} \quad \hat{X}_i = X_{n+i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Definiamo ora $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ la v.a. a valori in $\mathbb{R}^n$ data da

$$Y_i = \bar{X}_i\hat{X}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

b) Dimostrare che per ogni $i, j = 1, \ldots, n$ si ha

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \bar{C}_{ij}\hat{C}_{ij}.$$

Sulla base dei punti **a)** e **b)**, dimostrare la Proposizione 1.

Esercizio 6. Siano X e Z due v.a. reali indipendenti tali che $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ e $\mathbb{P}(Z = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(Z = -1)$. Definiamo $Y = ZX$.

a) Scrivere la funzione caratteristica di Y e dedurre che $Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

b) Scrivere la funzione caratteristica di (X, Y) e dedurre che X e Y non sono indipendenti.

c) Verificare che $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

d) È possibile che la coppia (X, Y) abbia legge gaussiana su $\mathbb{R}^2$?

[Sugg: dovendo calcolare $\mathbb{E}(f(X, Z))$, con f opportuna, si potrebbe usare la seguente relazione: $f(X, Z) = f(X, Z)1\!\!1_{Z=1} + f(X, Z)1\!\!1_{Z=-1} = f(X, 1)1\!\!1_{Z=1} + f(X, -1)1\!\!1_{Z=-1}$ ed essendo $X \perp\!\!\!\perp Z$, si ha $\mathbb{E}(f(X, Z)) = \mathbb{E}(f(X, 1)1\!\!1_{Z=1}) + \mathbb{E}(f(X, -1)1\!\!1_{Z=-1}) = \mathbb{E}(f(X, 1))\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{E}(f(X, -1))\mathbb{P}(Z = -1)$.]

Esercizio 7. Sia $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ una v.a. su $\mathbb{R}^d$ di legge $\mathrm{N}(\mu, C)$, con $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \mathrm{Mat}(d \times d)$ simmetrica e semidefinita positiva.

a) Per $m \in \mathbb{R}^k$ e $A \in \mathrm{Mat}(k \times d)$, sia $W = m + AZ$. Dimostrare che W è ancora gaussiana e precisare i parametri che caratterizzano la legge. Dedurre poi che per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, la v.a. $\lambda_1 Z_1 + \dots + \lambda_d Z_d$ è gaussiana, di parametri da determinare.

b) Siano X e Y due v.a. su $\mathbb{R}$ congiuntamente gaussiane, centrate e tali che $\mathbb{E}(X^2) = 4$, $\mathbb{E}(Y^2) = 1$ e $2X + Y \perp\!\!\!\perp X - 3Y$.

b1) Scrivere la matrice di covarianza di (X, Y).

b2) Calcolare la legge di $(X + Y, 2X - Y)$.

Soluzioni

Esercizio 1. Sia X una v.a. con f.c. φ: $\varphi = \varphi_X$. Allora

$$\bar\varphi(t) = \overline{\mathbb{E}(e^{itX})} = \mathbb{E}(\,\overline{e^{itX}}\,) = \mathbb{E}(e^{-itX}) = \varphi_{-X}(t)$$

quindi $\bar\varphi$ è la f.c. di $Y = -X$. Poi, scelte X_1, X_2 due v.a. indipendenti con la stessa legge di X, si ha

$$\varphi^2(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_1+X_2}(t),$$

e ancora $\varphi^2(t)$ è la f.c. di $Z = X_1 + X_2$. Infine, prese X_1, X_2 come sopra, si ha

$$|\varphi|^2(t) = \varphi(t)\cdot\bar\varphi(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_{-X}(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{-X_2}(t) = \varphi_{X_1-X_2}(t),$$

dunque $|\varphi|^2(t)$ è la f.c. di $X_1 - X_2$.

Esercizio 2 Poiché $X \in L^2$, si ha

$$\varphi'(0) = \mathbb{E}(i\,X) = i\mathbb{E}(X) \quad \text{e} \quad \varphi''(0) = \mathbb{E}((iX)^2) = -\mathbb{E}(X^2).$$

Poiché $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2$, sostituendo si ha $-\varphi''(0) \geq -\varphi'(0)^2$, da cui la tesi.

Esercizio 3 a) Dev'essere $c > 0$ e

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^y ce^{-\lambda y}dx = c\int_0^{+\infty} ye^{-\lambda y}dy = \frac{c}{\lambda}\int_0^{+\infty}\lambda ye^{-\lambda y}dy.$$

Nell'ultimo integrale riconosciamo la media della legge $\mathrm{Exp}(\lambda)$, che fa $\frac{1}{\lambda}$, da cui segue che

$$1 = \frac{c}{\lambda^2} \quad \text{e quindi} \quad c = \lambda^2.$$

Poiché, guardando alla densità congiunta, si ha $Y > X > 0$, la v.a. XY è non negativa: calcolare la media corrisponde anche a provare che esiste. Dunque, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_{\mathbb{R}^2} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} dy\int_0^y xy\,\lambda^2 e^{-\lambda y}dx \\ &= \frac{\lambda^2}{2}\int_0^{+\infty} y^3e^{-\lambda y}dy = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^{+\infty} y^{4-1}e^{-\lambda y}dy.\end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale riconosciamo, a meno della costante, la densità $\Gamma(4,\lambda)$, dunque l'integrale è dato dal reciproco della costante di normalizzazione. Possiamo quindi scrivere

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^{+\infty} y^{4-1}e^{-\lambda y}dy = \frac{\lambda^2}{2}\cdot\frac{\Gamma(4)}{\lambda^4} = \frac{\lambda^2}{2}\cdot\frac{3!}{\lambda^4} = \frac{3}{\lambda^2}.$$

b) Si ha

$$\begin{aligned}\varphi_{X,Y}(\theta_1,\theta_2) &= \mathbb{E}(e^{i(\theta_1X+\theta_2Y)}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\theta_1x+\theta_2y)}f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ &= \int_0^{+\infty} dy\int_0^y e^{i(\theta_1x+\theta_2y)}\lambda^2e^{-\lambda y}dx = \lambda^2\int_0^{+\infty} dye^{i\theta_2y}\lambda^2e^{-\lambda y}\frac{e^{i\theta_1x}}{i\theta_1}\Big|_{x=0}^{x=y} \\ &= \frac{\lambda^2}{i\theta_1}\int_0^{+\infty}\big(e^{i(\theta_1+\theta_2)y} - e^{i\theta_2y}\big)e^{-\lambda y}dy.\end{aligned}$$

Ma usando l'espressione della funzione caratteristica della legge Exp(λ), sappiamo che $\int_0^{+\infty} \lambda e^{it\xi} e^{-\lambda\xi} d\xi = \frac{\lambda}{\lambda - it}$, quindi

$$\begin{aligned}\varphi_{X,Y}(\theta_1,\theta_2) &= \frac{\lambda}{i\theta_1}\Big(\int_0^{+\infty} e^{i(\theta_1+\theta_2)y}\lambda e^{-\lambda y}dy - \int_0^{+\infty} e^{i\theta_2 y}\lambda e^{-\lambda y}dy\Big)\\ &= \frac{\lambda}{i\theta_1}\Big(\frac{\lambda}{\lambda - i(\theta_1+\theta_2)} - \frac{\lambda}{\lambda - i\theta_2}\Big) = \frac{\lambda^2}{i\theta_1}\cdot\frac{i\theta_1}{(\lambda - i(\theta_1+\theta_2))(\lambda - i\theta_2)}\\ &= \frac{\lambda^2}{(\lambda - i(\theta_1+\theta_2))(\lambda - i\theta_2)}.\end{aligned}$$

c) $\varphi_{X,Y} \in C^k$ per ogni k, quindi esistono tutti i momenti ed inoltre:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\varphi_{X,Y}(0,0) = i\mathbb{E}(X), \quad \frac{\partial}{\partial\theta_2}\varphi_{X,Y}(0,0) = i\mathbb{E}(Y), \quad \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\varphi_{X,Y}(0,0) = -\mathbb{E}(XY).$$

Calcoliamo queste derivate:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\theta_1}\varphi_{X,Y}(\theta_1,\theta_2) = \lambda^2 i\big(\lambda - i(\theta_1+\theta_2)\big)^{-2}\big(\lambda - i\theta_2\big)^{-1};\\ &\frac{\partial}{\partial\theta_2}\varphi_{X,Y}(\theta_1,\theta_2) = \lambda^2 i\big(\lambda - i(\theta_1+\theta_2)\big)^{-2}\big(\lambda - i\theta_2\big)^{-2}\big(\big(\lambda - i(\theta_1+\theta_2)\big) + \big(\lambda - i\theta_2\big)\big);\\ &\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\varphi_{X,Y}(\theta_1,\theta_2) = \lambda^2 i^2\big(\lambda - i(\theta_1+\theta_2)\big)^{-3}\big(\lambda - i\theta_2\big)^{-2}\big(2\big(\lambda - i(\theta_1+\theta_2)\big) + \lambda - i\theta_2\big).\end{aligned}$$

Nell'origine, otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\varphi_{X,Y}(0,0) = i\frac{1}{\lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta_2}\varphi_{X,Y}(0,0) = i\frac{2}{\lambda}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\varphi_{X,Y}(\theta_1,\theta_2) = -\frac{3}{\lambda^2}$$

e quindi

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{\lambda}, \quad \mathbb{E}(XY) = \frac{3}{\lambda^2}$$

(notare che la terza media era stata già calcolata, correttamente!) da cui si ottiene

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{3}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

d) (U,V) è una trasformazione lineare di (X,Y):

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando le proprietà delle funzioni caratteristiche, otteniamo facilmente

$$\varphi_{U,V}(\theta) = \varphi_{X,Y}(A^*\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}^2.$$

Qui,

$$A^*\theta = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 - \theta_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo

$$\varphi_{U,V}(\theta) = \frac{\lambda^2}{(\lambda - i\theta_1)(\lambda - i\theta_2)}.$$

Osserviamo che la quantità a destra è data dal prodotto della f.c. della legge $\text{Exp}(\lambda)$ calcolata in θ_1 ed in θ_2. Per le proprietà delle f.c. possiamo subito affermare che $U \perp\!\!\!\perp V$ e $U, V \sim \text{Exp}(\lambda)$.

e) Abbiamo appena detto qual è la legge di (U, V), quindi

$$f_{U,V}(u, v) = \lambda e^{\lambda u} 1\!\!1_{u>0} \cdot \lambda e^{-\lambda v} 1\!\!1_{v>0}.$$

Arriviamo ora allo stesso risultato usando il TCV.

Possiamo scrivere $(U, V) = \phi(X, Y)$, con $\phi(x, y) = (x, y-x)$. ϕ è regolare con inversa regolare data da $\psi(u, v) = (u, u + v)$. La matrice Jacobiana è

$$J_\psi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\det J_\psi(u, v) = 1$. Usando il TCV, otteniamo

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}\big(\psi(u, v)\big)|\det J_\psi(u, v)| = \lambda^2 e^{-\lambda(u+v)} 1\!\!1_{u+v>u>0} = \lambda^2 e^{-\lambda(u+v)} 1\!\!1_{u>0,v>0}.$$

Dunque,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}\big(\psi(u, v)\big)|\det J_\psi(u, v)| = \lambda e^{-\lambda u} 1\!\!1_{u>0} \cdot \lambda e^{-\lambda v} 1\!\!1_{v>0}$$

ed ancora otteniamo che $U \perp\!\!\!\perp V$ e $U, V \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Esercizio 4. a) Sia $e_1, \ldots, e_d$ la base canonica su $\mathbb{R}^d$ e per $k = 1, \ldots, d$, sia $\theta_k = te_k$, $t \in \mathbb{R}$. Poiché $\langle \theta_k, X\rangle = tX_k$, otteniamo facilmente che $\varphi_{X_k}(t) = \varphi_X(\theta_k)$. Essendo $\langle \theta_k, \mu\rangle = t\mu_k$ e $\langle C\theta_k, \theta_k\rangle = C_{kk} \geq 0$, si ha

$$\varphi_{X_k}(t) = e^{it\mu_k - \frac{1}{2} C_{kk} t^2},$$

e quindi $X_k \sim \text{N}(\mu_k, C_{kk})$.

b) Ricordando che $C_{k,\ell} = \text{Cov}(X_k, X_\ell)$, otteniamo che C è una matrice diagonale, quindi $\langle C\theta, \theta\rangle = \sum_{k=1}^d C_{kk}\theta_k^2$. Ma allora

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_d}(\theta_1, \ldots, \theta_d) = e^{\sum_{k=1}^d (i\theta_k\mu_k - \frac{1}{2} C_{kk}\theta_k^2)} = \varphi_{X_1}(\theta_1) \cdots \varphi_{X_d}(\theta_d),$$

il che prova che $X_1, \ldots, X_d$ sono indipendenti.

c) Poniamo $X = (\bar{X}, \hat{X})$ e per $\theta \in \mathbb{R}^d$, usiamo la notazione $\theta = (\bar{\theta}, \hat{\theta})$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k$ e $\hat{\theta} = (\theta_{k+1}, \ldots, \theta_d) \in \mathbb{R}^{d-k}$. Osserviamo che si ha

$$\langle \mu, \theta\rangle = \langle \bar{\mu}, \bar{\theta}\rangle + \langle \hat{\mu}, \hat{\theta}\rangle \quad \text{e} \quad \langle C\theta, \theta\rangle = \langle \bar{C}\bar{\theta}, \bar{\theta}\rangle + \langle \hat{C}\hat{\theta}, \hat{\theta}\rangle$$

dove ovviamente si è posto $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k$ e $\hat{\mu} = (\mu_{k+1}, \ldots, \mu_d) \in \mathbb{R}^{d-k}$. Poiché

$$\varphi_X(\theta) = \varphi_{\bar{X},\hat{X}}(\bar{\theta}, \hat{\theta}),$$

si ha:

$$\varphi_{\bar{X}}(\bar{\theta}) = \varphi_{\bar{X},\hat{X}}(\bar{\theta}, 0) = e^{i\langle\bar{\mu},\bar{\theta}\rangle - \frac{1}{2}\langle\bar{C}\bar{\theta},\bar{\theta}\rangle}$$
$$\varphi_{\hat{X}}(\hat{\theta}) = \varphi_{\bar{X},\hat{X}}(0, \hat{\theta}) = e^{i\langle\hat{\mu},\hat{\theta}\rangle - \frac{1}{2}\langle\hat{C}\hat{\theta},\hat{\theta}\rangle}$$

e dunque $\bar{X} \sim \text{N}(\bar{\mu}, \bar{C})$, $\hat{X} \sim \text{N}(\hat{\mu}, \hat{C})$. Di conseguenza,

$$\varphi_X(\theta) = \varphi_{\bar{X},\hat{X}}(\bar{\theta}, \hat{\theta}) = \varphi_{\bar{X}}(\bar{\theta})\varphi_{\hat{X}}(\hat{\theta}),$$

quindi $\bar{X} \perp\!\!\!\perp \hat{X}$.

Osservazione. Ricordiamo che se due v.a. sono indipendenti allora hanno covarianza nulla, e quindi matrice di covarianza diagonale. Viceversa, in generale covarianza nulla <u>non</u> implica indipendenza. Ma questo esercizio prova che nel caso gaussiano questa controparte c'è se la legge congiunta è gaussiana. Possiamo infatti enunciare questo risultato come segue: *due v.a. congiuntamente gaussiane e con covarianza nulla sono anche indipendenti.*

Esercizio 5. a) L'abbiamo già visto nell'esercizio 4: preso $\theta \in \mathbb{R}^n$ e posto $\theta = (\bar{\theta}, \hat{\theta})$, con $\bar{\theta}, \hat{\theta} \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\langle C\theta, \theta\rangle = \langle \bar{C}\bar{\theta}, \bar{\theta}\rangle + \langle \hat{C}\hat{\theta}, \hat{\theta}\rangle \geq 0.$$

b) Usando l'Esercizio 4, sappiamo che $\bar{X}$ e $\hat{X}$ sono indipendenti e che $\bar{X} \sim \mathrm{N}(0, \bar{C})$, $\hat{X} \sim \mathrm{N}(0, \hat{C})$. Quindi

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(\bar{X}_i \hat{X}_i) = \mathbb{E}(\bar{X}_i)\mathbb{E}(\hat{X}_i) = 0$$

perché le coordinate sono gaussiane centrate. Inoltre,

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}(Y_i Y_j) = \mathbb{E}(\bar{X}_i \hat{X}_i \bar{X}_j \hat{X}_j) = \mathbb{E}(\bar{X}_i \bar{X}_j \cdot \hat{X}_i \hat{X}_j).$$

Ma $\bar{X}$ e $\hat{X}$ sono indipendenti, quindi anche $\bar{X}_i \bar{X}_j$ e $\hat{X}_i \hat{X}_j$ lo sono. Dunque,

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}(\bar{X}_i \bar{X}_j)\mathbb{E}(\hat{X}_i \hat{X}_j) = \bar{C}_{ij}\hat{C}_{ij}.$$

c) Siano $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ matrici simmetriche semidefinite positive. Posto $\bar{C} = A$ e $\hat{C} = B$, usando i punti precedenti dimostriamo che $C_Y = A \odot B$ è la matrice di covarianza di un opportuno vettore aleatorio Y. La tesi ora segue ricordando che le matrici di covarianza sono sempre simmetriche semidefinite positive.

Esercizio 6. a) Per $t \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{itY}) = \mathbb{E}(e^{itXZ}) = \mathbb{E}(e^{itXZ} 1\!\!1_{Z=1}) + \mathbb{E}(e^{itXZ} 1\!\!1_{Z=-1}) \\
&= \mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{E}(e^{-itX})\mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}\,\varphi_X(t) + \frac{1}{2}\varphi_X(-t) \\
&= e^{-t^2/2}
\end{aligned}$$

e quindi $Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

b) Per $\theta \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\begin{aligned}
\varphi_{X,Y}(\theta) &= \mathbb{E}(e^{i\theta_1 X + i\theta_1 Y}) = \mathbb{E}(e^{i\theta_1 X + i\theta_1 XZ}) \\
&= \mathbb{E}(e^{i\theta_1 X + i\theta_1 XZ} 1\!\!1_{Z=1}) + \mathbb{E}(e^{i\theta_1 X + i\theta_1 XZ} 1\!\!1_{Z=-1}) \\
&= \mathbb{E}(e^{i(\theta_1+\theta_2)X})\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{E}(e^{-i(\theta_1-\theta_2)X})\mathbb{P}(Z = -1) \\
&= \frac{1}{2}\,\varphi_X(\theta_1 + \theta_2) + \frac{1}{2}\varphi_X(\theta_1 - \theta_2) \\
&= \frac{1}{2}\big(e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)^2} + e^{-\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)^2}\big).
\end{aligned}$$

In particolare, $\varphi_{X,Y}(\theta)$ non è data da $\varphi_X(\theta_1) \cdot \varphi_Y(\theta_2)$, quindi X e Y non sono indipendenti.

c) Poiché X e Y sono centrate, si ha

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2 Z) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Z) = 0.$$

c) No, non è possibile: se infatti fossero congiuntamente gaussiane, avendo covarianza nulla per l'esercizio 4 sarebbero anche indipendenti.

Osservazione. In questo esercizio abbiamo un esempio di due v.a. gaussiane con covarianza nulla ma che non sono indipendenti. Ciò significa che nel caso gaussiano l'equivalenza tra covarianza nulla ed indipendenza vale solo quando si faccia l'ipotesi a monte di legge *congiuntamente* gaussiana.

Esertcizio 7. a) Per $\theta \in \mathbb{R}^k$, si ha

$$\varphi_W(\theta) = \varphi_{m+AZ}(\theta) = e^{i\langle m,\theta\rangle}\varphi_Z(A^*\theta) = e^{i\langle m,\theta\rangle + i\langle \mu, A^*\theta\rangle - \frac{1}{2}\langle CA^*\theta, A^*\theta\rangle}.$$

Ma $\langle \mu, A^*\theta\rangle = \langle A\mu, \theta\rangle$ e $\langle CA^*\theta, A^*\theta\rangle = \langle ACA^*\theta, \theta\rangle$, quindi

$$\varphi_W(\theta) = \varphi_{m+AZ}(\theta) = e^{i\langle m+A\mu,\theta\rangle - \frac{1}{2}\langle ACA^*\theta,\theta\rangle},$$

da cui segue che $W \sim \mathrm{N}(m + A\mu, ACA^*)$. Infine, per $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\lambda_1 Z_1 + \cdots + \lambda_d Z_d = AZ, \quad \text{con } A = \lambda^*,$$

quindi $\lambda_1 Z_1 + \cdots + \lambda_d Z_d$ è una v.a. gaussiana su $\mathbb{R}$, di media $A\mu = \langle \lambda, \mu\rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i \mu_i$ e varianza $ACA^* = \langle C\lambda, \lambda\rangle = \sum_{i,j=1}^d C_{ij}\lambda_i\lambda_j$.

b1) Detta C_{XY} la matrice di covarianza di (X, Y), sappiamo che

$$C_{XY} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) \end{pmatrix}.$$

Qui, essendo $\mathbb{E}(X) = 0 = \mathbb{E}(Y)$, si ha $\mathrm{Var}(X) = 4$ e $\mathrm{Var}(Y) = 1$. L'ipotesi $2X + Y \perp\!\!\!\perp X - 3Y$ dà $0 = \mathrm{Cov}(2X + Y, X - 3Y) = 2\mathrm{Var}(X) - 6\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Y) - 3\mathrm{Var}(Y) = 5 - 5\mathrm{Cov}(X,Y)$, da cui $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1$. Ma allora,

$$C_{XY} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b2) La coppia $(X + Y, 2X - Y)$ è una trasformazione lineare di (X, Y), quindi per il punto **a)** ha legge gaussiana. Essendo

$$\begin{pmatrix} X+Y \\ 2X-Y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

usando **a)** otteniamo immediatamente che la legge è $\mathrm{N}(0, \Gamma)$, con

$$\Gamma = AC_{XY}A^* = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}.$$