Tutorato VII
Probabilità e Statistica
a.a. 2015/2016

Argomenti: uso del TCV per il calcolo di densità; media, varianza, covarianza e matrice di covarianza di v.a. assolutamente continue; legge gaussiana su $\mathbb{R}$.

Esercizio 1. Sia (X, Y) una v.a. in $\mathbb{R}^2$ con densità continua

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{x^3 y^2} \mathbb{1}_{x>1, y>x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(Y < 2X)$.

b) Calcolare la densità congiunta di $U = \log X$ e $V = X/Y$ e le relative densità marginali.

Esercizio 2. Si chiama legge di Laplace di parametro $\lambda > 0$ quella individuata dalla densità

$$p(x) = c\, \mathrm{e}^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Calcolare c. Dire se X ha momento di ordine k, con $k \geq 1$. E qualora esistano, calcolare media e varianza di X.

b) Calcolare la densità di $Z = \alpha X$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si tratta di una legge nota?

c) Calcolare la legge di $W = |X|$. Si tratta di una legge nota? Esistono media e varianza? Se sì, quanto valgono?

Esercizio 3. Fissato $\mu \in \mathbb{R}$, sia

$$p(x) = c\, x^{\mu} \mathbb{1}_{x \in (0,1)}. \tag{1}$$

a) Determinare μ e c affinché p sia una densità di probabilità su $\mathbb{R}$.

Nel seguito, indicheremo con X una v.a. con densità (1), con μ e c appena determinate.

b) Dire per quali valori di μ esiste la media di X e calcolarla.

c) Siano X e Y due v.a. indipendenti, X con densità data da (1) con $\mu = 1$ (verificare che $\mu = 1$ dà effettivamente una densità!) e $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$. Calcolare la densità della v.a. $X + Y$.

Esercizio 4. Una v.a. X su $\mathbb{R}$ è detta "di Cauchy" se ha densità

$$p(x) = \frac{c}{1 + x^2}$$

a) Mostrare che $c = 1/\pi$ e scrivere esplicitamente la funzione di distribuzione associata.

b) Dire se X ha valor medio. X ha varianza?

c) Calcolare la legge di $Y = X^2$. Y ha media? Ha varianza?

d) Dopo aver verificato che la v.a. $Z = 1/X$ è ben posta, calcolare la legge di Z. Z ha media? Ha varianza?

Esercizio 5. Siano X e Y v.a. indipendenti tali che $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ e $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. Calcolare la densità e la f.r. di:

a) $Z = X + Y$;

b) $W = \alpha X$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si tratta di leggi note?

Esercizio 6. Sia X una v.a. con densità $\Gamma(\alpha, \lambda)$, ovvero

$$p_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} 1\!\!1_{(0,+\infty)}(x), \quad \alpha, \lambda > 0.$$

a) Esistono i momenti di $Y = 1/X$? Se sì, fino a quale ordine?

b) Calcolare, se possibile, la media di Y.

c) Calcolare, se possibile, $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Che tipo di dipendenza c'è tra X e Y?

Esercizio 7. Siano X ed Y due v.a. indipendenti $X \sim \mathrm{Un}(0, 1)$ e $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$.

a) Posto $U = X$ e $V = X - Y$, calcolare la densità congiunta di (U, V).

b) Usando **a)**, calcolare la densità di $X - Y$.

c) Usando **b)**, calcolare $\mathbb{P}(X > Y)$.

Esercizio 8. Siano X e Y due v.a. con densità congiunta

$$p(x, y) = c\sqrt{x^2 + y^2}\, 1\!\!1_{x^2+y^2 \le 1}$$

a) Calcolare c e la densità congiunta di $U = X$ e $V = Y/X$. U e V sono indipendenti?

b) Sia R la distanza di (X, Y) dall'origine. Calcolare, se esistono, $\mathbb{E}(R)$ e $\mathrm{Var}(R)$.

c) Per $n \ge 1$, sia R_n la distanza di (X_n, Y_n) dall'origine, con (X_n, Y_n) copie indipendenti di (X, Y). Posto $D_n = \min(R_1, \ldots, R_n)$, $n \ge 1$, dimostrare che per ogni $\delta > 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n > \delta) = 0$.

Esercizio 9. Sia $X \sim \mathrm{N}(10, 36)$. Facendo uso delle tavole, calcolare:

a) $\mathbb{P}(X > 4)$;

b) $\mathbb{P}(4 < X \le 16)$;

c) $\mathbb{P}(X \le 22)$;

d) il valore di c per cui $\mathbb{P}(X > c) = 0.10$;

e) il valore di c per cui $\mathbb{P}(|X - 10| > c) = 0.10$.

Soluzioni

Esercizio 1. a) Posto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < 2x\}$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y < 2X) &= \int_A f_{XY}(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{2x} \frac{3}{x^3y^2}\,\mathbb{1}_{x>1,y>x}\,dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^3}dx \int_x^{2x} \frac{1}{y^2}\,dy = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^3}\Big[-\frac{1}{y}\Big]_{y=x}^{y=2x} dx = \frac{3}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b) $(U,V) = \phi(X,Y)$, dove $\phi(x,y) = (\log x, x/y)$. ϕ è invertibile su $O = \{(x,y) \,:\, x > 1, y > x\}$, e sia ϕ che la sua inversa $g(u,v) = (e^u, e^u/v)$, definita su $\{(u,v) \,:\, u > 0, 0 < v < 1\}$, sono C^∞. Inoltre, $\mathbb{P}((X,Y) \in O) = 1$, dunque TCV dà

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(g(u,v))|\det J_g(u,v)|\mathbb{1}_{(u,v)\in g(O)},$$

dove J_g denota la matrice jacobiana associata a g. Si ha

$$\det J_g(u,v) = \det\begin{pmatrix} e^u & 0 \\ e^u/v & -e^u/v^2 \end{pmatrix} = -e^{2u}/v^2.$$

Allora,

$$\begin{aligned}f_{UV}(u,v) &= f_{XY}(g(u,v))|\det J_g(u,v)| = \frac{3}{e^{3u}e^{2u}/v^2}\,\mathbb{1}_{e^u>1,e^u/v>e^u}\,\frac{e^{2u}}{v^2} \\ &= 3e^{-3u}\mathbb{1}_{u>0}\,\mathbb{1}_{0<v<1}.\end{aligned}$$

Osserviamo che $U \perp\!\!\!\perp V$, $U \sim \mathrm{Exp}(3)$ e $V \sim \mathrm{Un}(0,1)$.

Eserzizio 2. a) Dev'essere $f \geq 0$, da cui segue che $c > 0$, e $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, ovvero

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} c\,e^{-\lambda|x|}dx = 2c\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = 2c = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2c}{\lambda}$$

da cui $c = \lambda/2$. Poi, X ha momento di ordine k se e solo se l'integrale $\int_{\mathbb{R}} |x|^k p(x)dx$ è finito. Qui, $|x|^k p(x) = c|x|^k e^{-\lambda|x|}$, che va a zero, per $x \to \pm\infty$, in modo arbitrariamente veloce (grazie all'esponenziale), dunque l'integrale è finito e quindi X ha tutti i momenti. In particolare, ha media e varianza. Osservando che $x \mapsto xp(x)$ è una funzione dispari, otteniamo immediatamente che $\mathbb{E}(X) = 0$. Poi, dal momento che $x \mapsto x^2p(x)$ è pari, possiamo scrivere

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = 2\int_0^\infty \frac{\lambda}{2}\,x^2e^{-\lambda x}dx = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx$$

e riconosciamo, a destra, il momento secondo della legge $\mathrm{Exp}(\lambda)$, che (ricordiamo) ha media $\frac{1}{\lambda}$ e varianza $\frac{1}{\lambda^2}$. Quindi,

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} + \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

b) Se $\alpha = 0$, $Z = 0$ e la legge di Z è banale: $p_Z(0) = 1$ e $p_Z(z) = 0$ per ogni $z \neq 0$, dove qui p_Z denota la densità discreta. Supponiamo ora $\alpha \neq 0$ e calcoliamo la funzione di ripartizione di $Z = \alpha X$. Osserviamo che questa v.a. prende valori in $\mathbb{R}$. Per $z \in \mathbb{R}$,

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\alpha X \leq z).$$

A questo punto occorre distinguere il caso $\alpha > 0$ dal caso $\alpha < 0$. Se $\alpha > 0$, si ha:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\alpha X \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z/\alpha) = \int_{-\infty}^{z/\alpha} \frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda|x|} dx.$$

Derivando otteniamo la densità

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{\lambda}{2\alpha}\, e^{-\frac{\lambda}{\alpha}|z|},$$

quindi Z ha una legge di Laplace di parametro λ/α. Se $\alpha < 0$, si ha:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\alpha X \leq z) = \mathbb{P}(X \geq z/\alpha) = \int_{z/\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda|x|} dx.$$

Derivando otteniamo la densità

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = -\frac{\lambda}{2\alpha}\, e^{-\frac{\lambda}{|\alpha|}|z|},$$

quindi Z ha una legge di Laplace di parametro $-\lambda/\alpha$. Riassumendo qualunque sia α la v.a. αX ha legge di Laplace di parametro $\lambda/|\alpha|$.

c) Calcoliamo la funzione di ripartizione di $W = |X|$. Osserviamo che questa v.a. prende valori in $\mathbb{R}^+$. Se $w \leq 0$ allora $F_W(w) = 0$, per $w > 0$,

$$F_W(w) = \mathbb{P}(W \leq w) = \mathbb{P}(|W| \leq w) = \mathbb{P}(-w \leq X \leq w) =$$
$$\frac{\lambda}{2} \int_{-w}^{w} e^{-\lambda|x|}\, dx = \lambda \int_0^w e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-\lambda w}.$$

Quindi $W \sim \exp(\lambda)$. Ovviamente, W ha media e varianza date rispettivamente da $\frac{1}{\lambda}$ e $\frac{1}{\lambda^2}$.

Esercizio 3 a) Cerchiamo μ tale che esiste finito $\lim_{\alpha\to 0^+} \int_\alpha^1 x^\mu dx$: per $\alpha > 0$,

$$\int_\alpha^1 x^\mu dx = \begin{cases} \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\Big|_\alpha^1 = \frac{1-\alpha^{\mu+1}}{\mu+1} & \text{se } \mu \neq -1 \\ \ln x \Big|_\alpha^1 = -\ln \alpha & \text{se } \mu = -1 \end{cases}$$

Quindi,

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_\alpha^1 x^\mu dx = \begin{cases} \frac{1}{\mu+1} & \text{se } \mu > -1 \\ +\infty & \text{se } \mu \leq -1 \end{cases}$$

Possiamo allora concludere dicendo che p è integrabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $\mu > -1$ ed inoltre $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = \frac{c}{\mu+1}$.

Perché p sia una densità, dev'essere p integrabile, $p \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$, quindi p è una densità se e solo se $\mu > -1$ ed inoltre $\frac{c}{\mu+1} = 1$, cioè $c = \mu + 1$.

b) Indichiamo con p_X e p_Y la densità di X e Y rispettivamente:

$$p_X(x) = 2\, x\, 1\!\!1_{x\in(0,1)} \qquad p_Y(y) = e^{-y} 1\!\!1_{y>0}.$$

Per calcolare la densità di $X + Y$ basta calcolare la convoluzione (continua) tra p_X e p_Y:

$$p_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} p_X(x) p_Y(z-x)\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} 2\, x\, 1\!\!1_{0<x<1} \cdot e^{-(z-x)}\, 1\!\!1_{z-x>0}\, dx = 2\, e^{-z} \int_{\mathbb{R}} x\, e^x\, 1\!\!1_{0<x<1,\, x<z}\, dx.$$

Calcoliamo separatamente $\int_{\mathbb{R}} x\, e^x\, 1\!\!1_{0<x<1, x<z}\, dx$. Tutto dipende da come si trova z rispetto a 0 e 1.

- $z \le 0$: $1\!\!1_{0<x<1,x<z} \equiv 0$, quindi $\int_{\mathbb{R}} x\, e^x\, 1\!\!1_{0<x<1,x<z}\, dx = 0$;
- $0 < z < 1$: $1\!\!1_{0<x<1,x<z} = 1\!\!1_{0<x<z}$, quindi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x\, e^x\, 1\!\!1_{0<x<1,x<z}\, dx &= \int_0^z xe^x\, dx = x\, e^x\Big|_0^z - \int_0^z e^x\, dx \\ &= z\, e^z - e^x\Big|_0^z = z\, e^z - e^z + 1 = (z-1)e^z + 1;\end{aligned}$$

- $z \ge 1$: $1\!\!1_{0<x<1,x<z} = 1\!\!1_{0<x<1}$, quindi

$$\int_{\mathbb{R}} x\, e^x\, 1\!\!1_{0<x<1,x<z}\, dx = \int_0^1 xe^x\, dx = x\, e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1.$$

Riassumendo, possiamo scrivere

$$p_{X+Y}(z) = 2\, e^{-z}\Big(\Big(-(1-z)e^z + 1\Big)1\!\!1_{0<z<1} + 1\!\!1_{z\ge 1}\Big) = 2\, e^{-z} 1\!\!1_{z>0} - 2\,(1-z)\, 1\!\!1_{0<z<1}.$$

Si noti che p_{X+Y} è una densità: $p_{X+Y}(z) \ge 0$ per ogni z, perché $e^{-z} \ge 1-z$ per ogni $z \in (0,1)$ (verificare!), ed inoltre

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} p_{X+Y}(z)dz = 2\int_0^{+\infty} e^{-z}dz - 2\int_0^1 (1-z)dz \\ &= 2\Big(-e^{-z}\Big|_0^{+\infty} + \frac{(1-z)^2}{2}\Big|_0^1\Big) = 2\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = 1.\end{aligned}$$

Esercizio 4. **a)** Studiamo il comportamento asintotico per $\alpha \to +\infty$ di $\int_{-\alpha}^{\alpha} p(x)dx$:

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} p(x)\, dx &= \lim_{\alpha\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\arctan x\Big|_0^{\alpha} \\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\arctan\alpha = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1\end{aligned}$$

quindi esite finito $\int_{\mathbb{R}} p(x)\, dx = 1$. La f.r. associata è

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\arctan t\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\Big(\arctan x + \frac{\pi}{2}\Big).$$

b) Studiamo il comportamento asintotico per $\alpha \to +\infty$ di $\int_{-\alpha}^{\alpha} |x|\, p(x)dx$:

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} |x|\, p(x)\, dx &= \lim_{\alpha\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\alpha} = \frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\ln(1+\alpha^2) = +\infty\end{aligned}$$

quindi una v.a. di Cauchy **non** ha media. E quindi, non ha alcun momento, tanto meno varianza.

c) Se $y \leq 0$, ovviamente $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = 0$. Se invece $y > 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

quindi, per $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}\Big(F_X(y) - F_X(-y)\Big) = \Big(f_X(y) + f_X(-y)\Big) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Possiamo infine scrivere

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{y}(1+y)}\, 1\!\!1_{y>0}.$$

Ovviamente $Y = X^2$ **non** può avere né media né varianza, perché in caso affermativo significherebbe che X ha momento secondo o quarto, il che non è possibile perché non ha neanche momento primo.

d) $Z = 1/X$ è ben posta: l'eventuale problema è per $X = 0$, che comunque è un evento di probabilità 0 (perché X ha densità). Calcoliamo la sua f.r.: per $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) =& \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\Big(\frac{1}{X} \leq z\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{1}{X} \leq z, X > 0\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{1}{X} \leq z, X < 0\Big) \\
=& \mathbb{P}(1 \leq z\,X, X > 0) + \mathbb{P}(1 \geq z\,X, X < 0) \\
=& \mathbb{P}\Big(\frac{1}{z} \leq X, X > 0, z > 0\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{1}{z} \geq X, X > 0, z < 0\Big) + \\
&+ \mathbb{P}\Big(\frac{1}{z} \geq X, X < 0, z > 0\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{1}{z} \leq X, X < 0, z < 0\Big)
\end{aligned}$$

quindi:

• se $z > 0$:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) =& \mathbb{P}\Big(\frac{1}{z} \leq X, X > 0\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{1}{z} \geq X, X < 0\Big) \\
=& \mathbb{P}\Big(X \geq \frac{1}{z}\Big) + \mathbb{P}(X < 0) = 1 - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big) + F_X(0) = \frac{3}{2} - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big)
\end{aligned}$$

e

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\Big(\frac{3}{2} - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big) = -f_X\Big(\frac{1}{z}\Big) \cdot \frac{-1}{z^2} = \frac{1}{\pi\,(1+z^2)};$$

• se $z < 0$:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) =& \mathbb{P}\Big(\frac{1}{z} \geq X, X > 0\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{1}{z} \leq X, X < 0\Big) \\
=& 0 + \mathbb{P}(\Big(\frac{1}{z} \leq X < 0\Big) = F_X(0) - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big) = \frac{1}{2} - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big)
\end{aligned}$$

e

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{2} - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big) = -f_X\Big(\frac{1}{z}\Big) \cdot \frac{-1}{z^2} = \frac{1}{\pi\,(1+z^2)}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi\,(1+z^2)}\, 1\!\!1_{z\neq 0}.$$

Quindi f_Z e la densità p di una v.a di Cauchy coincidono ovunque tranne che nell'origine, quindi Z è ancora una v.a. di Cauchy (come abbiamo già detto, se le densità sono modificate su un insieme finito di punti, le funzioni di distribuzione non cambiano).

Esercizio 5. a) Dato che X ed Y sono indipendenti la densità della v.a. Z è data dal prodotto di convoluzione. Se $\lambda = \mu$, già sappiamo che $X + Y \sim \Gamma(2, \lambda)$, procediamo quindi per $\lambda \neq \mu$.
Per $z > 0$ (X e Y sono v.a. positive quindi anche la loro somma) si ha

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-\lambda x} 1\!\!1_{(0,+\infty)}(x)\, \mu e^{-\mu(z-x)} 1\!\!1_{(0,+\infty)}(z-x)dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, \mu e^{-\mu(z-x)} 1\!\!1_{(0,z)}(x)dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(z-x)} dx.$$

Quindi,

$$f_Z(z) = \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda}(e^{-\lambda z} - e^{-\mu z})\, 1\!\!1_{z>0}.$$

Passiamo al calcolo della funzione di ripartizione. Per $z < 0$ $F_Z(z) = 0$, mentre per $z \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \int_0^z f_Z(x)dx = \int_0^z \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda x} - e^{-\mu x})dx \\ &= \frac{1}{\mu-\lambda}[\mu(1-e^{-\lambda z}) - \lambda(1-e^{-\mu z})] = \frac{1}{\mu-\lambda}[\mu F_X(z) - \lambda F_Y(z)]. \end{aligned}$$

b) Se $\alpha = 0$ allora $W = 0$ e $\mathbb{P}(W = 0) = 1$. Se $\alpha > 0$ si ha $F_W(w) = 0$ se $w < 0$ mentre per $w \geq 0$

$$F_W(w) = \mathbb{P}(W \leq w) = \mathbb{P}(\alpha X \leq w) = \mathbb{P}(X \leq w/\alpha) = F_X(w/\alpha) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}w}.$$

Pertanto $W \sim \mathrm{Exp}(\frac{\lambda}{\alpha})$ e quindi ha densità

$$f_W(w) = \frac{\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}w}\, 1\!\!1_{w>0}.$$

Se $\alpha < 0$ si ha $F_W(w) = 1$ se $w > 0$ mentre per $w \leq 0$

$$F_W(w) = \mathbb{P}(W \leq w) = \mathbb{P}(\alpha X \leq w) = \mathbb{P}(X > w/\alpha) = 1 - F_X(w/\alpha) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}w}.$$

Pertanto W ha densità

$$f_W(w) = -\frac{\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}w}\, 1\!\!1_{w<0}$$

ed è facile verificare che W ha la legge di $-V$, dove $V \sim \mathrm{Exp}(\frac{\lambda}{|\alpha|})$.

Esercizio 6. a) Essendo Y una v.a. positiva, procediamo direttamente al calcolo dei momenti:

$$\mathbb{E}(Y^k) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^k} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{(\alpha-k)-1} e^{-\lambda x} dx.$$

Questo integrale converge solo $\alpha - k > 0$, quindi esistono i momenti per $k < \alpha$. Ed in questo caso si ha,

$$\mathbb{E}[Y^k] = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{\lambda^{\alpha-k}} = \lambda^k \frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Ma essendo $\alpha > k$, possiamo scrivere $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = \cdots = (\alpha-1)\cdots(\alpha-k)\Gamma(\alpha-k)$, da cui otteniamo

$$\mathbb{E}[Y^k] = \frac{\lambda^k}{\prod_{j=1}^k (\alpha - j)}.$$

b) Y ha media se e solo se $\alpha > 1$ ed in tal caso abbiamo visto che

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}.$$

c) Ricordando che la media della legge $\Gamma(\alpha, \lambda)$ è data da $\frac{\alpha}{\lambda}$, si ha

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(1) - \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\lambda}{\alpha - 1} = 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} = -\frac{1}{\alpha - 1},$$

purché però $\alpha > 1$ (cioè, esista la media di Y). La dipendenza è quindi negativa (il che non è sorprendente...). Osserviamo che in generale $\mathrm{Cov}(X, Y)$ è ben posta per X e Y con momento secondo, il che qui vorrebbe dire che $\alpha > 2$. Ma abbiamo appena visto che in questo caso basta che Y abbia media, cioè $\alpha > 1$.

Esercizio 7. a) Usiamo il TCV: $(U, V) = \varphi(X, Y)$, dove $\varphi(x, y) = (x, x - y)$ è regolare con inversa regolare data da $\psi(u, v) = (u, u - v)$. La matrice Jacobiana associata è

$$J_\psi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi $|\det J_\psi(u, v)| = 1$. Allora, la densità di (U, V) è data da

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(u, u - v).$$

Ma $X \perp\!\!\!\perp Y$, con $f_X(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ e $f_Y(y) = e^{-x}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$. Dunque, si ha

$$f_{U,V}(u, v) = f_X(u)f_Y(u - v) = e^{-(u-v)}\mathbb{1}_{u\in(0,1),\ u-v>0}.$$

b) Poiché $X - Y = V$, si ha

$$f_{X-Y}(v) = f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u, v)du = \int_{\mathbb{R}} e^{-(u-v)}\mathbb{1}_{u\in(0,1),\ u-v>0}du.$$

Ora:

- se $v > 1$ allora $\mathbb{1}_{u\in(0,1),\ u-v>0} = 0$ e quindi $f_{X-Y}(v) = 0$;
- se $0 < v < 1$ allora $\mathbb{1}_{u\in(0,1),\ u-v>0} = \mathbb{1}_{u\in(v,1)}$ e quindi

$$f_{X-Y}(v) = \int_v^1 e^{-(u-v)}du = 1 - e^{v-1};$$

- se $v < 0$ allora $\mathbb{1}_{u\in(0,1),\ u-v>0} = \mathbb{1}_{u\in(0,1)}$ e quindi

$$f_{X-Y}(v) = \int_0^1 e^{-(u-v)}du = e^v(1 - e^{-1}).$$

Ricapitolando, si ottiene

$$f_{X-Y}(v) = (1 - e^{v-1})\mathbb{1}_{v\in(0,1)} + e^v(1 - e^{-1})\mathbb{1}_{v<0}.$$

c) Si ha

$$\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X - Y > 0) = \int_0^\infty f_{X-Y}(v)dv = \int_0^1 (1 - e^{v-1})dv = e^{-1}.$$

Esercizio 8. a) Si ha

$$c^{-1} = \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2\, d\rho = \frac{2}{3}\,\pi,$$

quindi $c = 3/(2\pi)$.
Possiamo scrivere $(U,V) = \phi(X,Y)$, dove $\phi(x,y) = (x, y/x)$ è regolare e invertibile per $x \neq 0$, con inversa

$$\psi(u,v) = (u, uv), \qquad u \neq 0.$$

Inoltre, la matrice Jacobiana è data da

$$J_\psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{pmatrix}$$

e quindi $\det J_\psi(u,v) = u$. Allora, usando il TCV segue che

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y} \circ \psi(u,v)\, |\det J_\psi(u,v)|\, 1\!\!1_{u\neq 0} = \frac{3}{2\pi}\, u^2 \sqrt{1+v^2}\, 1\!\!1_{u\neq 0, u^2(1+v^2)\leq 1}.$$

Dunque $f_{U,V}$ non si fattorizza nel prodotto di due funzioni dipendenti l'una dalla sola u e l'altra dalla sola v, quindi U e V non sono indipendenti.

b) Ovviamente $R = \sqrt{X^2+Y^2}$. Essendo $p > 0$ solo sulla palla di centro l'origine e raggio 1, evidentemente $0 < R < 1$ con probabilità 1, cioè R è limitata, quindi ha media e varianza. Calcoliamole. Passando in coordinate polari, possiamo scrivere

$$\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}(\sqrt{X^2+Y^2}) = \int \sqrt{x^2+y^2}\, p(x,y) dx dy = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{3}{4}.$$

Analogamente,

$$\mathbb{E}(R^2) = \mathbb{E}(X^2+Y^2) = \int (x^2+y^2) p(x,y) dx dy = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{3}{5},$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(R) = \mathbb{E}(R^2) - \mathbb{E}(R)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

c) Cerchiamo la f.r. di R_n: per $0 < r < 1$,

$$F_n(r) = \mathbb{P}(R_n \leq r) = \mathbb{P}(X^2+Y^2 \leq r^2) = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho^2\, d\rho = r^3$$

e $F_n(r) = 0$ se $r \leq 0$, $F_n(r) = 1$ per $r \geq 1$. Quindi, fissato $\delta > 0$, e usando l'indipendenza delle R_n,

$$\mathbb{P}(D_n > \delta) = \mathbb{P}(R_1 > \delta, \ldots, R_n > \delta) = \mathbb{P}(R_1 > \delta) \cdots \mathbb{P}(R_n > \delta) = (1-\delta^3)^n$$

purché $\delta \in (0,1)$, altrimenti $\mathbb{P}(D_n > \delta) = 0$. Ma allora, per ogni $\delta > 0$, si ha $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n > \delta) = 0$.

Esercizio 9 Ricordiamo che se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ allora $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$. Pertanto si ha, facendo ricorso alle tabelle della funzione di ripartizione Φ di una gaussiana standard e ricordando che per motivi di simmetria, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$,

a) $\mathbb{P}(X > 4) = \mathbb{P}\Big(Z > \frac{4-10}{6}\Big) = \mathbb{P}(Z > -1) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0.84134$.
b) $\mathbb{P}(4 < X \leq 16) = \mathbb{P}(-1 < Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.68268$.
c) $\mathbb{P}(X \leq 22) = \mathbb{P}(Z \leq 2) = \Phi(2) = 0.97725$.
d) Dovendo essere $\mathbb{P}(X > c) = \mathbb{P}\Big(Z > \frac{c-10}{6}\Big) = 0.10$, segue che $\frac{c-10}{6} = \phi_{0.90}$, essendo ϕ_α il quantile di ordine α di una $\mathrm{N}(0,1)$. Dalle tabelle $\phi_{0.90} = 1.285$. Pertanto $\frac{c-10}{6} = 1.285$, ovvero $c = 17.71$.
e)Dovendo essere $\mathbb{P}(|X - 10| > c) = \mathbb{P}\Big(|Z| > \frac{c}{6}\Big) = 0.10$, segue che $\frac{c}{6} = \phi_{0.95}$, essendo ϕ_α il quantile di ordine α di una $\mathrm{N}(0,1)$. Dalle tabelle $\phi_{0.95} = 1.645$. Pertanto $\frac{c}{6} = 1.645$, ovvero $c = 9.87$.