

Argomenti: disuguaglianza di Chebycev e legge dei grandi numeri; v.a. assolutamente continue: densità congiunte e marginali; indipendenza; calcoli con densità.

Esercizio 1. Una moneta dà testa con probabilità p incognita. Per avere informazioni su p , la moneta viene tirata n volte e si osserva la percentuale di teste uscite su n lanci. Volendo approssimare p con tale percentuale,

- a) quanto deve essere grande n affinché con probabilità maggiore di 0.99 l'errore commesso sia al più 0.1?
- b) E quanto deve essere grande n affinché con probabilità maggiore di 0.9 l'errore commesso sia al più 0.01?

Qualcuno sostiene che occorranza più lanci per vedere soddisfatta la prima condizione, perché la probabilità richiesta è maggiore. Cosa ne pensate?

[Sugg.: si usi la disuguaglianza di Chebycev.]

Esercizio 2. Un dado viene lanciato n volte. Sia S_n in numero di volte, su n lanci, in cui si osserva che è uscito 6. Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\frac{1}{n} S_n > 2)$.

[Sugg.: si ricorda la legge dei grandi numeri...]

Esercizio 3. Siano X e Y v.a. indipendenti, $X \sim \text{Geomod}(\frac{1}{2})$ e $Y \sim \text{Po}(\frac{1}{2})$. Sia $\{U_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. tutte con la stessa legge di $U = X - 2Y$. Stimare n affinché la v.a. $S_n = U_1 + \dots + U_n$ superi il livello $2n$ con probabilità al più 0.1.

Esercizio 4. Una v.a. di Weibull di parametri $\alpha, \lambda > 0$ è una v.a. assolutamente continua T con densità

$$p(t) = \alpha \lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} \mathbb{1}_{t>0}.$$

- a) Le v.a. di Weibull vengono utilizzate per descrivere *tempi di vita (aleatori)*, ad esempio di apparecchiature, o di popolazioni biologiche. Giustificare tale interpretazione.
- b) Fissato $u \in \mathbb{R}$, calcolare esplicitamente $\mathbb{P}(T > u)$ e quindi la funzione di distribuzione F_T di T .
- c) Fissato $t > 0$, scrivere esplicitamente la funzione $g_t(\cdot)$ definita come

$$[0, +\infty) \ni s \mapsto g_t(s) = \mathbb{P}(T > t + s | T > s) = \mathbb{P}(T - s > t | T > s) \in [0, 1].$$

Determinare inoltre α e λ affinché la funzione $s \mapsto g_t(s)$ sia monotona o costante.

- d) Fissato $t > 0$, $\mathbb{P}(T - s > t | T > s)$ è la probabilità che l'unità cui T si riferisce rimanga in vita per un ulteriore tempo t noto che all'istante s è funzionante (se è noto che $T > s$, la v.a. $T - s$ viene usualmente interpretata come il *tempo di vita residuo*). Se T denota il tempo di vita (aleatorio) di una certa apparecchiatura, quali valori scegliereste per α e λ se tale apparecchiatura fosse soggetta ad usura? E se T si riferisse a qualcosa che tende a migliorare con l'età? E infine, se T è il tempo di vita di una unità che non tende né a migliorare né a peggiorare con il passare del tempo (o anche: se valesse il concetto di "perdita di memoria"), quali sarebbero i valori più opportuni per α e λ ?

Esercizio 5. Dire se esiste un valore della costante c affinché le funzioni f_1, f_2 e f_3 , definite da

$$f_1(x) = c(1 - x^2)\mathbb{1}_{\{x \in (-1,1)\}}, \quad f_2(x) = c(1 - x^2)\mathbb{1}_{\{x \in (-2,2)\}}, \quad f_3(x) = c(1 - x^2)\mathbb{1}_{\{x \in (2,3)\}},$$

siano densità di probabilità.

Esercizio 6. Fissato $\mu \in \mathbb{R}$, sia

$$p(x) = c x^\mu \mathbb{1}_{x \in (0,1)}. \quad (1)$$

- a) Determinare μ affinché p sia integrabile su $\mathbb{R}$.
- b) Per tali valori di μ , trovare c affinché p sia una densità di probabilità.
- c) Sia X una v.a. con densità data da (1) con $\mu = 1$ (verificare che $\mu = 1$ dà effettivamente una densità!). Calcolare la densità della v.a. $X^2 + 1$.

Esercizio 7. Una v.a. X è detta “di Cauchy” se ha densità

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

- a) Verificare che p è una densità di probabilità e scrivere esplicitamente la funzione di ripartizione.
- b) Calcolare la legge di $Y = X^2$.
- c) Dopo aver verificato che la v.a. $Z = 1/X$ è ben posta, calcolare la legge di Z .

Esercizio 8. Sia $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ e sia $\alpha > 0$. Verificare che la v.a. $X = T^{1/\alpha}$ è ben posta e calcolarne la legge. Si tratta di una legge nota?

Esercizio 9. Siano $X_1, \dots, X_n$ n v.a. indipendenti con densità $f_1, \dots, f_n$ e funzione di distribuzione $F_1, \dots, F_n$. Calcolare la densità di

$$U = \max(X_1, \dots, X_n) \quad W = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Specializzare al caso in cui $f_1 = \dots = f_n = f$ e quindi $F_1 = \dots = F_n = F$.

Esercizio 10. a) Sia X una v.a. con funzione di ripartizione F_X . Si supponga l'esistenza di due numeri reali a, b , con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, tali che:

- i) se $a > -\infty$ allora $F_X(x) = 0$, per ogni $x \leq a$; se $b < +\infty$ allora $F_X(x) = 1$, per ogni $x \geq b$;
- ii) esiste una funzione $G : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ tale che

$$F_X \circ G(y) = y, \text{ per ogni } y \in (0, 1) \quad \text{e} \quad G \circ F_X(x) = x, \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

(cioè F_X è invertibile su (a, b)).

Sia $Z \sim \text{Un}(0, 1)$ e $Y = G(Z)$. Dimostrare che $F_Y(\xi) = F_X(\xi)$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. Inoltre, se X ha densità di probabilità f_X dimostrare che anche Y ha densità $f_Y(\xi) = f_X(\xi)$.

- b)** Tenendo conto che esistono numerosi (e buoni) generatori aleatori in grado di simulare al calcolatore v.a. uniformi su $(0, 1)$, il risultato in **a)** può essere usato nella pratica per simulare una v.a. X con funzione di distribuzione F_X che verifica le proprietà *i)* e *ii)* (nel caso in cui l'inversa si può scrivere in modo esplicito): come? Ad esempio, se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, come fareste per simulare X ?

Esercizio 11. Sia $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Calcolare la legge di¹ $Y = \lfloor X \rfloor$. Si tratta di una legge nota? [Sugg.: per $x \geq 0$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$, quindi Y è una v.a. discreta...]

Esercizio 12. Un componente elettronico ha un tempo di vita S_1 che segue una legge $\text{Exp}(1/10)$. Un secondo componente è composto da due elementi, indipendenti tra loro e con il primo componente, posti in parallelo, con tempi di vita che seguono una legge $\text{Exp}(1/8)$.

- a)** Qual è la densità del tempo di vita S_2 del secondo componente?
b) Qual è la probabilità che il primo componente duri più a lungo del secondo?

Esercizio 13. Sia (X, Y) un vettore aleatorio su $\mathbb{R}^2$ con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{c}{1 + x^2 + y^2} \mathbb{1}_D(x, y),$$

dove $c \in \mathbb{R}$ e D è il disco unitario: $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- a)** Calcolare c .
b) Calcolare le densità marginali. Le v.a. X e Y sono indipendenti?
c) Fissato $r > 0$, calcolare la probabilità che il punto (X, Y) disti dall'origine per più di r .
d) Usando **c)**, calcolare la densità di probabilità della distanza di (X, Y) dall'origine.

¹Ricordiamo che per $x \geq 0$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ e per $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x \rfloor = n$ se e solo se $x \in [n, n + 1)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia Y_n il numero di teste uscite su n lanci: $Y_n \sim \text{Bi}(n, p)$. La percentuale di teste osservate è quindi $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}Y_n$.

a) Si chiede n affinché

$$\mathbb{P}(|\bar{Y}_n - p| \leq 0.1) \geq 0.99$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}(|\bar{Y}_n - p| > 0.1) \leq 0.01.$$

Tenendo conto che $\mathbb{E}(\bar{Y}_n) = p$, possiamo usare la disuguaglianza di Chebycev:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\bar{Y}_n - p| > 0.1) &\leq \frac{\text{Var}(\bar{Y}_n)}{0.1^2} = 100 \text{Var}\left(\frac{1}{n}Y_n\right) = \frac{100}{n^2} \text{Var}(Y_n) \\ &= \frac{100}{n^2} np(1-p) = \frac{100}{n} p(1-p). \end{aligned}$$

Poiché $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ per ogni $p \in [0, 1]$, possiamo scrivere

$$\mathbb{P}(|\bar{Y}_n - p| > 0.1) \leq \frac{100}{4n} = \frac{25}{n}$$

valida per ogni n e ogni p . Per avere $\mathbb{P}(|\bar{Y}_n - p| > 0.1) \leq 0.01$ basta richiedere che

$$\frac{25}{n} \leq 0.01$$

cioè $n \geq 25 \cdot 100 = 2500$. Dunque, scegliendo $n \geq 2500$, siamo “ragionevolmente tranquilli” che il parametro p non dista dalla percentuale di teste osservate per più di 0.1 (dove “ragionevolmente tranquilli” significa che questa eventualità ha probabilità alta (≥ 0.99) di verificarsi).

b) Si chiede n affinché

$$\mathbb{P}(|\bar{Y}_n - p| \leq 0.01) \geq 0.9$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}(|\bar{Y}_n - p| > 0.01) \leq 0.1.$$

La disuguaglianza di Chebycev e la stima $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ danno

$$\mathbb{P}(|\bar{Y}_n - p| > 0.01) \leq \frac{\frac{1}{4}}{n \cdot 0.01^2} = \frac{2500}{n}.$$

Quindi, basta che

$$\frac{2500}{n} \leq 0.1$$

cioè $n \geq 2500 \cdot 10 = 25000$. Quindi n è più grande. Il motivo? La stima di Chebycev è lineare nella probabilità (0.99 e 0.9) ma inversamente proporzionale al quadrato della “tolleranza” (0.1 e 0.01).

Esercizio 2. Per $i \geq 1$, sia X_i la v.a. bernoulliana che vale 1 se all’ i -esimo lancio esce 6, e vale 0 altrimenti, cosicchè $S_n = X_1 + \dots + X_n$ e quindi $\frac{1}{n}S_n = \bar{X}_n$. Osserviamo che $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{6}$. La LGN dice che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{6}\right| > \eta\right) = 0$$

per ogni $\eta > 0$. Ora,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} S_n > 2\right) = \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{6} > 2 - \frac{1}{6}\right) = \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{6} > \frac{11}{6}\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{6}\right| > \frac{11}{6}\right) \rightarrow 0$$

e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} S_n > 2\right) = 0$.

Esercizio 3. Ricordiamo che se $X \sim \text{Geomod}(p)$ allora $\mathbb{E}(X) = 1/p$ e $\text{Var}(X) = (1-p)/p^2$; se $Z \sim \text{Po}(\lambda)$ allora $\mathbb{E}(Z) = \text{Var}(Z) = \lambda$. Qui, $p = \lambda = \frac{1}{2}$ e

$$\mathbb{E}(X) = 2, \quad \text{Var}(X) = 2, \quad \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{1}{2}.$$

Quindi, per linearità,

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X - 2Y) = \mathbb{E}(X) - 2\mathbb{E}(Y) = 1.$$

Inoltre, poiché $X \perp\!\!\!\perp Y$, si ha $X \perp\!\!\!\perp -2Y$ e

$$\text{Var}(U) = \text{Var}(X - 2Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(-2Y) = \text{Var}(X) + 4\text{Var}(Y) = 2 + 2 = 4.$$

Si chiede n tale che $\mathbb{P}(S_n > 2n) \leq 0.1$. Osserviamo che

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(U_k) = n\mathbb{E}(U) = n,$$

quindi

$$\mathbb{P}(S_n > 2n) = \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) > n) \leq \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > n)$$

ed usando la disuguaglianza di Chebycev otteniamo

$$\mathbb{P}(S_n > 2n) \leq \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > n) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2}.$$

Ma S_n è somma di v.a. indipendenti, quindi

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(U_k) = n\text{Var}(U) = 4n$$

e sostituendo,

$$\mathbb{P}(S_n > 2n) \leq \frac{4}{n}.$$

Imponiamo ora che $\frac{4}{n} \leq 0.1$, da cui segue che $n \geq 40$.

Esercizio 4. a) Si ha

$$\mathbb{P}(T > 0) = \int_0^{+\infty} p(t)dt = \int_{\mathbb{R}} p(t)dt = 1$$

perché $p(t) \equiv 0$ per $t < 0$. Quindi T è una v.a. positiva e può dunque essere usata per descrivere probabilisticamente dei tempi di vita.

b) Per $u \leq 0$, si ha

$$\mathbb{P}(T > u) = \int_u^{+\infty} p(t)dt = \int_0^{+\infty} p(t)dt = 1$$

perché $p(t) \equiv 0$ per $t < 0$. Se invece $u > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > u) &= \int_u^{+\infty} p(t) dt = \int_u^{+\infty} \alpha \lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} \mathbb{1}_{t>0} dt \\ &= - \int_u^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(e^{-\lambda t^\alpha} \right) dt = - e^{-\lambda t^\alpha} \Big|_{t=u}^{t \uparrow +\infty} = e^{-\lambda u^\alpha}.\end{aligned}$$

Quindi la f.d. di T è

$$F_T(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda u^\alpha} & \text{se } u > 0 \end{cases}$$

c) Si ha

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > s) = \frac{\mathbb{P}(T > t + s, T > s)}{\mathbb{P}(T > s)} = \frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > s)}$$

perché $\{T > t + s\} \subset \{T > s\}$. Quindi, usando **b)**,

$$g_t(s) = \exp \left\{ -\lambda \left((t + s)^\alpha - s^\alpha \right) \right\}.$$

Studiamo il segno della derivata di g_t , per $s > 0$:

$$g'_t(s) = -\lambda \alpha g_t(s) \left[(t + s)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1} \right].$$

Allora, $g'_t(s) \geq 0$ se e solo se $(t + s)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1} \leq 0$, ovvero

$$\left(\frac{t + s}{s} \right)^{\alpha-1} \leq 1$$

che equivale (si ricordi che $t, s > 0$) a richiedere

$$\alpha \leq 1.$$

Possiamo quindi riassumere come segue: $g_t(s)$ è

- monotona crescente in $s > 0$ se e solo se $\alpha < 1$;
- costante in $s > 0$ se e solo se $\alpha = 1$;
- monotona decrescente in $s > 0$ se e solo se $\alpha > 1$.

d) Sia T il tempo di vita di una unità. La funzione $g_t(s)$ rappresenta la probabilità che l'apparecchiatura sopravviva un ulteriore tempo t , condizionatamente al fatto che è funzionante all'istante s , cioè la probabilità che il tempo di vita residuo a s sia maggiore di t . Se quindi g_t è decrescente ($\alpha < 1$), tale apparecchiatura dev'essere soggetta ad un fenomeno di tipo usura, ovvero tende a deteriorarsi con il tempo: all'aumentare del tempo (s), il tempo di vita residuo tende a diminuire. Se invece g_t è crescente ($\alpha > 1$), l'unità in questione tende a migliorare con l'età: all'aumentare del tempo (s), il tempo di vita residuo tende ad aumentare. Qualora invece g_t fosse costante ($\alpha = 1$), significherebbe che l'età non influenza il tempo di vita residuo dell'apparecchiatura ("perdita di memoria").

Si noti infine che per $\alpha = 1$ allora p è la densità di una $\text{Exp}(\lambda)$: le v.a. esponenziali soddisfano quindi la proprietà di "perdita di memoria", che nel caso discreto è tipica delle v.a. geometriche.

Esercizio 5. Ricordiamo che perché f sia una densità dev'essere $f \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Inoltre, osserviamo che $1 - x^2 \geq 0$ per $x \in [-1, 1]$ e $1 - x^2 \leq 0$ per $x \leq -1$ e $x \geq 1$.

- Se $c \geq 0$, $f_1 \geq 0$ per ogni x : f_1 è una densità se si sceglie c tale che $c \int_{-1}^1 (1 - x^2)dx = 1$, cioè $c = 3/4$.

- Comunque si scelga c , f_2 non è a segno costante (se, ad esempio, $c > 0$, $f_2(0) > 0$ e $f_2(3/2) < 0$), dunque non esiste c tale che f_2 è una densità.

- Osserviamo che per $x \in (2, 3)$, la funzione $x \mapsto 1 - x^2$ è sempre negativa, dunque preso $c < 0$ si ottiene $f_3(x) \geq 0$ per ogni x . Infine,

$$1 = c \int_2^3 (1 - x^2)dx = -\frac{2}{3}c, \quad \text{da cui si ottiene } c = -\frac{3}{2}.$$

Dunque, $f_3(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 1)\mathbb{1}_{\{x \in (2, 3)\}}$ è una densità.

Esercizio 6. Cerchiamo μ tale che esista finito $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 x^{\mu} dx$: per $\alpha > 0$,

$$\int_{\alpha}^1 x^{\mu} dx = \begin{cases} \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \Big|_{\alpha}^1 = \frac{1-\alpha^{\mu+1}}{\mu+1} & \text{se } \mu \neq -1 \\ \ln x \Big|_{\alpha}^1 = -\ln \alpha & \text{se } \mu = -1 \end{cases}$$

Quindi,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 x^{\mu} dx = \begin{cases} \frac{1}{\mu+1} & \text{se } \mu > -1 \\ +\infty & \text{se } \mu \leq -1 \end{cases}$$

Possiamo allora concludere dicendo che p è integrabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $\mu > -1$ ed inoltre $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = \frac{c}{\mu+1}$.

b) Perché p sia una densità, dev'essere p integrabile, $p \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$, quindi p è una densità se e solo se $\mu > -1$ ed inoltre $\frac{c}{\mu+1} = 1$, cioè $c = \mu + 1$.

c) Se $\mu = 1$ abbiamo visto che p è una densità quando si sceglie $c = 2$. Posto quindi $Y = X^2 + 1$, si ha

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X^2 + 1 \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y - 1).$$

Dunque, $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$. Se invece $y > 1$ si ha

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}) = \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} 2x \mathbb{1}_{(0,1)}(x)dx.$$

Dunque, se $y - 1 < 1$ cioè $y < 2$ si ha

$$F_Y(y) = \int_0^{\sqrt{y-1}} 2x dx = y - 1.$$

Se invece $y - 1 \geq 1$, ovvero $y \geq 2$, allora

$$F_Y(y) = \int_0^1 2x dx = 1.$$

Riassumendo, otteniamo

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 1 \\ y - 1 & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{se } y \geq 2 \end{cases}$$

Osserviamo che F_Y è derivabile con continuità ovunque eccetto che in $y = 1, 2$, quindi Y ha densità data da

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{(1,2)}(y)$$

e quindi $Y \sim \text{Un}(1, 2)$.

Esercizio 7. a) Studiamo il comportamento asintotico per $\alpha \rightarrow +\infty$ di $\int_{-\alpha}^{\alpha} p(x) dx$:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(x) dx &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^{\alpha} \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \arctan \alpha = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$

quindi esiste finito $\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$. La f.r. associata è

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right).$$

b) Se $y \leq 0$, ovviamente $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = 0$. Se invece $y > 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

quindi, per $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} (F_X(y) - F_X(-y)) = (f_X(y) + f_X(-y)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Possiamo infine scrivere

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{y}(1+y)} \mathbb{1}_{y>0}.$$

c) $Z = 1/X$ è ben posta: l'eventuale problema è per $X = 0$, che comunque è un evento di probabilità 0 (perché X ha densità). Calcoliamo la sua f.r.: per $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, si ha:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq z\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq z, X > 0\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq z, X < 0\right) \\ &= \mathbb{P}(1 \leq zX, X > 0) + \mathbb{P}(1 \geq zX, X < 0) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{z} \leq X, X > 0, z > 0\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{z} \geq X, X > 0, z < 0\right) + \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\frac{1}{z} \geq X, X < 0, z > 0\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{z} \leq X, X < 0, z < 0\right) \end{aligned}$$

e quindi:

- se $z > 0$:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{z} \leq X, X > 0\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{z} \geq X, X < 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{z}\right) + \mathbb{P}(X < 0) = 1 - F_X\left(\frac{1}{z}\right) + F_X(0) = \frac{3}{2} - F_X\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

e

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{3}{2} - F_X\left(\frac{1}{z}\right) \right) = -f_X\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{-1}{z^2} = \frac{1}{\pi(1+z^2)};$$

- se $z < 0$:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{z} \geq X, X > 0\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{z} \leq X, X < 0\right) \\ &= 0 + \mathbb{P}\left(\frac{1}{z} \leq X < 0\right) = F_X(0) - F_X\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \frac{1}{2} - F_X\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

e

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} - F_X\left(\frac{1}{z}\right) \right) = -f_X\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{-1}{z^2} = \frac{1}{\pi(1+z^2)}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)} \mathbb{1}_{z \neq 0}.$$

Quindi f_Z e la densità p di una v.a di Cauchy coincidono ovunque tranne che nell'origine, quindi Z è ancora una v.a. di Cauchy (se due densità differiscono su un insieme finito di punti, le funzioni di distribuzione non cambiano).

Esercizio 8. Poiché $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, in particolare $T > 0$, dunque $X = T^{1/\alpha}$ è ben posta. Inoltre $X > 0$, dunque $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0$ per $x \leq 0$. Se invece $x > 0$, si ha

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(T^{1/\alpha} \leq x) = \mathbb{P}(T \leq x^\alpha) = F_T(x^\alpha)$$

quindi

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_T(x^\alpha) = f_T(x^\alpha) \cdot \alpha x^{\alpha-1} = \alpha \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha} \mathbb{1}_{x>0}$$

cioè X è una v.a. di Weibull di parametri α e λ .

Esercizio 9. Calcoliamo dapprima la legge del massimo:

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq u) = \mathbb{P}(X_1 \leq u, \dots, X_n \leq u) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \leq u) = \prod_{k=1}^n F_k(u), \end{aligned}$$

quindi

$$f_U(u) = \frac{d}{du} \prod_{k=1}^n F_k(u) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{du} F_i(u) \prod_{k=1, k \neq i}^n F_k(u) = \sum_{i=1}^n f_i(u) \prod_{k=1, k \neq i}^n F_k(u).$$

Se $f_1 = \dots = f_n = f$ e $F_1 = \dots = F_n = F$, allora

$$f_U(u) = n f(u) F^{n-1}(u).$$

Per il minimo, si ha

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \leq w) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > w) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > w, \dots, X_n > w) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k > w) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - F_k(w)), \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} f_W(w) &= -\frac{d}{dw} \prod_{k=1}^n (1 - F_k(w)) = -\sum_{i=1}^n \frac{d}{dw} (1 - F_i(w)) \prod_{k=1, k \neq i}^n (1 - F_k(w)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dw} F_i(w) \prod_{k=1, k \neq i}^n (1 - F_k(w)) = \sum_{i=1}^n f_i(w) \prod_{k=1, k \neq i}^n (1 - F_k(w)). \end{aligned}$$

Se $f_1 = \dots = f_n = f$ e $F_1 = \dots = F_n = F$, allora

$$f_W(w) = n f(w) (1 - F(w))^{n-1}.$$

Esercizio 10. a) Ricordiamo che, se $Z \sim \text{Un}(0, 1)$, allora

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ z, & 0 \leq z \leq 1 \\ 1, & z \geq 1. \end{cases} \quad \text{e} \quad f_Z(z) = \mathbb{1}_{(0,1)}(z)$$

dove F_Z e f_Z denotano, rispettivamente, la funzione di distribuzione e la densità di probabilità di Z .

$F_X(x)$ è la funzione di distribuzione di X , quindi F_X è una funzione non decrescente, che tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$ e tende a 1 per $x \rightarrow +\infty$. Le ipotesi *i*) e *ii*) garantiscono che, almeno su un intervallo (a, b) di $\mathbb{R}$, F_X è invertibile, quindi strettamente crescente e tale proprietà vale anche per G . Allora, tenendo presente che $F_X \circ G = \text{Id}$,

$$F_Y(\xi) = \mathbb{P}(Y \leq \xi) = \mathbb{P}(G(Z) \leq \xi) = \mathbb{P}(F_X \circ G(Z) \leq F_X(\xi)) = \mathbb{P}(Z \leq F_X(\xi)) = F_X(\xi)$$

perché $F_X(\xi) \in [0, 1]$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. Quindi $F_Y(\xi) = F_X(\xi)$, per ogni ξ . Inoltre, se esiste f_X allora esiste $f_Y(\xi) = \frac{d}{d\xi} F_Y(\xi) = \frac{d}{d\xi} F_X(\xi) = f_X(\xi)$, per ogni ξ per cui tali derivate esistono.

b) Questo risultato può essere usato per simulare una v.a. la cui funzione di distribuzione verifichi le proprietà richieste e la funzione G , inversa di F_X , si possa scrivere esplicitamente. In tal caso, infatti, la v.a. $G(Z)$, con $Z \sim \text{Un}(0, 1)$, ha stessa distribuzione e densità di X e può dunque essere presa come una realizzazione di X .

Ad esempio, supponiamo di dover simulare una v.a. X esponenziale. Se $\lambda > 0$ denota il parametro, allora

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Quindi F_X **non** è invertibile su tutto $\mathbb{R}$ ma lo è se ristretta a $(0, +\infty)$: qui F_X verifica i) e ii), con $a = 0$, $b = +\infty$. L'inversa è data da

$$G(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y), \quad y \in (0, 1).$$

Quindi, se $Z \sim \text{Un}(0, 1)$ allora $Y = G(Z) \sim \text{Exp}(\lambda)$: per generare una v.a. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ basta generare una $Z \sim \text{Un}(0, 1)$ e considerare $-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Z)$.

Esercizio 11 Per $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = n) &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n) = \mathbb{P}(n \leq X < n+1) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)} = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}). \end{aligned}$$

Dunque, Y è una v.a. geometrica di parametro $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Esercizio 12. a) Indichiamo con S_1 e S_2 il tempo di vita del primo e del secondo componente; con T_1 e T_2 i tempi di vita dei due elementi che determinano il secondo componente. Allora, $S_1 \sim \text{Exp}(1/10)$, $T_1, T_2 \sim \text{Exp}(1/8)$ e $S_2 = \max(T_1, T_2)$.

a) Calcoliamo la funzione di distribuzione di S_2 : usando il fatto che T_1 e T_2 sono indipendenti, per $s > 0$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F_{S_2}(s) &= \mathbb{P}(S_2 \leq s) = \mathbb{P}(\max(T_1, T_2) \leq s) = \mathbb{P}(T_1 \leq s, T_2 \leq s) \\ &= \mathbb{P}(T_1 \leq s)\mathbb{P}(T_2 \leq s) = (1 - e^{-s/8})^2 \end{aligned}$$

e $F_{S_2}(s) = 0$ se $s \leq 0$. Derivando rispetto ad s , si ottiene la densità di probabilità:

$$f_{S_2}(s) = \frac{1}{4} e^{-s/8} (1 - e^{-s/8}) \mathbb{1}_{s>0}$$

(si veda anche l'esercizio 8).

b) La probabilità richiesta è $\mathbb{P}(S_1 > S_2)$. Poiché $S_2 = \max(T_1, T_2)$ e S_1, T_1, T_2 sono indipendenti, anche S_1 e S_2 lo sono, quindi la densità congiunta di S_1 e S_2 esiste ed è data da

$$f_{S_1, S_2}(s_1, s_2) = f_{S_1}(s_1) f_{S_2}(s_2) = \frac{1}{40} e^{-s_1/10} e^{-s_2/8} (1 - e^{-s_2/8}) \mathbb{1}_{s_1>0, s_2>0}.$$

Dunque,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 > S_2) &= \int_{\{(s_1, s_2) : s_1 > s_2\}} f_{S_1, S_2}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} ds_2 \int_{s_2}^{+\infty} \frac{1}{40} e^{-s_1/10} e^{-s_2/8} (1 - e^{-s_2/8}) \mathbb{1}_{s_1>0, s_2>0} ds_1 \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-s_2/8} (1 - e^{-s_2/8}) ds_2 \underbrace{\int_{s_2}^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-s_1/10} ds_1}_{=e^{-s_2/10}} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-9s_2/40} (1 - e^{-s_2/8}) ds_2 \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} e^{-9s_2/40} ds_2 - \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} e^{-7s_2/20} ds_2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{40}{9} - \frac{1}{4} \cdot \frac{20}{7} = \frac{25}{63} \end{aligned}$$

Esercizio 13. a) Dev'essere

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{c}{1+x^2+y^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy.$$

Passando a coordinate polari $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, otteniamo

$$1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{c}{1+\rho^2} \rho d\rho d\theta = c\pi \int_0^1 \frac{2\rho}{1+\rho^2} d\rho = c\pi \log(1+\rho^2)|_0^1 = c\pi \log 2$$

da cui segue che $c = (\pi \log 2)^{-1}$ e quindi

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi \log 2(1+x^2+y^2)} \mathbb{1}_D(x,y).$$

b) Si ha

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi \log 2(1+x^2+y^2)} \mathbb{1}_{\{y: x^2+y^2 \leq 1\}} dy.$$

Ora, se $|x| > 1$ ovviamente $\{y : x^2 + y^2 \leq 1\} = \emptyset$ e quindi $f_X(x) = 0$. Se invece $|x| \leq 1$, si ha

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi \log 2(1+x^2+y^2)} \mathbb{1}_{\{y: y^2 \leq 1-x^2\}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi \log 2(1+x^2+y^2)} \mathbb{1}_{\{-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}} dy \\ &= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi \log 2(1+x^2+y^2)} dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi \log 2(1+x^2+y^2)} dy \end{aligned}$$

perché la funzione integranda è pari e l'intervallo su cui si integra è simmetrico. Considerando il cambio di variabile $y = \sqrt{1-x^2} t$, otteniamo

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \frac{1}{\pi \log 2(1+x^2)(1+t^2)} \sqrt{1+x^2} dt \\ &= \frac{2\sqrt{1+x^2}}{\pi \log 2(1+x^2)} \int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{2\sqrt{1+x^2}}{\pi \log 2(1+x^2)} \arctan \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$f_X(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2}}{\pi \log 2(1+x^2)} \arctan \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \mathbb{1}_{|x| < 1}$$

e per simmetria, $f_Y = f_X$. Si vede subito che X e Y non possono essere indipendenti: $f_{X,Y}$ è non nulla sul disco unitario D mentre $f_X(x)f_Y(y)$ è non nulla sul quadrato $(-1,1) \times (-1,1)$.

c) La distanza di (X,Y) dall'origine è $\sqrt{X^2+Y^2}$, quindi si chiede $\mathbb{P}(\sqrt{X^2+Y^2} > r) = \mathbb{P}(X^2+Y^2 > r^2)$. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^2+Y^2 > r^2) &= \int_{\{(x,y): x^2+y^2 \geq r^2\}} f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= \int_{\{(x,y): x^2+y^2 \geq r^2\}} \frac{1}{\pi \log 2(1+x^2+y^2)} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dy \end{aligned}$$

Ora, se $r > 1$ si ha $\{(x, y) : x^2 + y^2 \geq r^2\} \cap \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \emptyset$, dunque $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 > r^2) = 0$. Se invece $r \leq 1$,

$$\mathbb{P}(X^2 + Y^2 > r^2) = \int_{\{(x,y) : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}} \frac{1}{\pi \log 2(1 + x^2 + y^2)} dy$$

e passando di nuovo a coordinate polari, otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^2 + Y^2 > r^2) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^1 \frac{1}{\pi \log 2(1 + \rho^2)} \rho d\rho \\ &= \frac{1}{\log 2} \log(1 + \rho^2) \Big|_{\rho=r}^{\rho=1} = \frac{\log 2 - \log(1 + r^2)}{\log 2}. \end{aligned}$$

d) Se Z denota la distanza dall'origine, allora $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ e quindi

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z)$$

Dunque, se $z < 0$ si ha $F_Z(z) = 0$ e se $z > 1$ si ha $F_Z(z) = 1$. Nel caso $z \in [0, 1]$ possiamo scrivere

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z) = \mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq z^2) = 1 - \mathbb{P}(X^2 + Y^2 > z^2).$$

Ma l'ultima quantità a destra è stata calcolata il **c)**, quindi

$$F_Z(z) = 1 - \frac{\log 2 - \log(1 + z^2)}{\log 2}$$

e derivando si ottiene

$$f_Z(z) = \frac{2z}{\log 2(1 + z^2)} \mathbb{1}_{|z| < 1}.$$