Tutorato IV
Probabilità e Statistica
a.a. 2015/2016

Argomenti: v.a. indipendenti; calcolo di leggi; somma di v.a.; speranza matematica; speranza matematica condizionale.

Esercizio 1. Siano X e Y due v.a. discrete a valori in E_X e E_Y rispettivamente, con densità congiunta discreta p_{XY} data da: $p_{XY}(x, y) = g_1(x)g_2(y)$, $x \in E_X$ e $y \in E_Y$, dove $g_1, g_2 \geq 0$. Siano p_X e p_Y le rispettive densità marginali. Dimostrare che

a) posto $c_1 = \sum_{x \in E_X} g_1(x)$ e $c_2 = \sum_{y \in E_Y} g_2(y)$, si ha $0 < c_1, c_2 < +\infty$;

b) $c_1 \cdot c_2 = 1$;

c) $p_X(x) = c_1^{-1}\, g_1(x)$ e $p_Y(y) = c_2^{-1}\, g_2(y)$.

Dedurre il seguente risultato:

d) *Due v.a. discrete X e Y sono indipendenti se e solo se esistono due funzioni g_1 e g_2 tali che la densità congiunta di X e Y si può scrivere $p_{XY}(x, y) = g_1(x)g_2(y)$.*

Esercizio 2. Siano X e Y v.a. indipendenti t.c.

$$X = \begin{cases} -1 & \text{con probabilità } \frac{1}{4} \\ 0 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{con probabilità } \frac{1}{8} \\ 2 & \text{con probabilità } \frac{1}{8} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{con probabilità } \frac{1}{3} \\ 0 & \text{con probabilità } \frac{2}{3} \end{cases}$$

a) Disegnare la funzione di ripartizione di X e di Y.

b) Posto $Z = X^2$, dire quali valori può assumere Z. Calcolare la densità discreta di Z e disegnare la relativa funzione di ripartizione.

c) Posto $W = Z + Y$, dire quali valori può assumere W. Calcolare la densità discreta di W e disegnare la relativa funzione di ripartizione.

Esercizio 3. In una sequenza di prove bernoulliane $X_1, X_2, \ldots$ con $p =$ probabilità di successo, siano T e U rispettivamente il primo e il secondo istante in cui si osserva il successo:

$$T = \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = 1\} \qquad U = \inf\{n \geq T + 1 \,:\, X_n = 1\}$$

a) Calcolare la distribuzione congiunta di T e U e le relative distribuzioni marginali.

b) Posto $V = U - T$, calcolare la distribuzione congiunta di T e V e dire se sono indipendenti.

d) Fissato $k \geq 1$, calcolare $\mathbb{P}(U > T + k)$ e dire per quali valori di k tale probabilità è minore di 0.1.

Esercizio 4. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x, \text{ con } x, y = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare la distribuzione condizionale di Y dato che $X = x$, per x appartenente ad un insieme opportuno che si chiede di specificare.

b) Calcolare la distribuzione congiunta di $Z = X + 1$ e $W = Y - X$. Z e W sono indipendenti?

Esercizio 5. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \dots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Verificare che la v.a. $W = Y/X$ è ben posta e calcolarne la legge.

b) Calcolare la legge di $X + Y$.

Esercizio 6. Una moneta, con $p =$probabilità che esca testa, viene lanciata N volte, dove N è una v.a. con distribuzione

$$p_N(n) = \frac{1}{2^n}, \qquad n \geq 1.$$

Sia S il numero di teste osservate.

a) Calcolare la probabilità di non aver osservato teste.

b) Calcolare la distribuzione di S. Quante teste escono in media?

c) Calcolare la distribuzione congiunta di S e N.

d) Calcolare la distribuzione condizionale $p_{N\,|\,S}$ di N dato S e verificare che, per ogni $k \geq 0$ fissato, $\sum_n p_{N\,|\,S}(n, |\,k) = 1$. Quante volte è stata lanciata in media la moneta noto che sono state osservate k teste, con $k = 0, 1, \dots$?

e) Calcolare la probabilità di aver lanciato la moneta un numero pari di volte noto che non sono state osservate teste.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che, per $x \in (0,1)$, $\sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{n!}{(n-\ell)!}\, x^{n-\ell} = \frac{\ell!}{(1-x)^{\ell+1}}$.]

Esercizio 7. Siano X, Y, Z tre v.a. indipendenti, con legge geometrica di parametro $p \in (0,1)$. Calcolare $\mathbb{P}(X = Y)$ e $\mathbb{P}(X \geq 2Y)$.

Esercizio 8. Le telefonate che giungono ad un centralino vengono indirizzate ad un operatore con probabilità $p \in [0,1]$ e smistate ad altro servizio in caso contrario (=con probabilità $1-p$). Supponiamo che il numero N (aleatorio) di telefonate giornaliere segua una legge $\mathrm{Po}(\lambda)$, con $\lambda > 0$ noto. Supponiamo anche che il numero di telefonate e gli esiti delle telefonate (indirizzo all'operatore o ad altro servizio) siano indipendenti. Qual è la probabilità che all'operatore giungano k telefonate al giorno?

Esercizio 9. Siano X e Y due v.a. discrete a valori in E_X e E_Y rispettivamente, con speranza matematica finita. Sia p_{XY} la densità discreta congiunta e siano p_X e p_Y le relative densità marginali. Siano ϕ e ψ due funzioni limitate. Dimostrare che

a) $\phi(X)$, $\psi(Y)$ e $\phi(X)\psi(Y)$ hanno speranza matematica finita;

b) se X e Y sono indipendenti allora $\mathbb{E}(\phi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(\phi(X))\mathbb{E}(\psi(Y))$;

c) fissati $x_0 \in E_X$ e $y_0 \in E_Y$ e scelte $\phi(x) = 1\!\!1_{\{x=x_0\}}$ e $\psi(x) = 1\!\!1_{\{y=y_0\}}$ si ha: $\mathbb{E}(\phi(X)\psi(Y)) = p_{XY}(x_0, y_0)$, $\mathbb{E}(\phi(X)) = p_X(x_0)$ e $\mathbb{E}(\psi(Y)) = p_Y(y_0)$.

Dedurre quindi il seguente risultato:

d) *Due v.a. discrete X e Y sono indipendenti se e solo se per ogni coppia di funzioni limitate ϕ e ψ si ha $\mathbb{E}(\phi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(\phi(X))\mathbb{E}(\psi(Y))$.*

Esercizio 10. Siano X e Y due v.a. discrete a valori in E_X e E_Y rispettivamente, e supponiamo che X abbia speranza matematica finita. Dimostrare che se X e Y sono indipendenti allora $\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \mathbb{E}(X)$, per ogni $y \in E_Y$ con $\mathbb{P}(Y = y) > 0$.

Esercizio 11. Siano p, q densità discrete di v.a. a valori in $E \subset \{0, 1, \ldots\}$. Si dice che q è *assolutamente continua* rispetto a p, in simboli: $q \ll p$, se per ogni $k \in E$ tale che $p(k) = 0$ allora si ha anche $q(k) = 0$. E si chiama *entropia* di una densità q rispetto a una densità p la quantità

$$H(q;p) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in E} \log \frac{q(k)}{p(k)}\, q(k) & \text{se } q \ll p \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notare che, in generale, $H(p;q) \neq H(q;p)$ ed inoltre che si ha sempre $H(p;p) = 0$.

a) Calcolare $H(p_\lambda; p_{\lambda_0})$ quando p_λ è la densità di Poisson di parametro λ. Mostrare che $\lambda \mapsto H(p_\lambda; p_{\lambda_0})$ si annulla per $\lambda = \lambda_0$ insieme alla sua derivata prima, mentre la derivata seconda è positiva. Dedurre che $H(p_\lambda; p_{\lambda_0}) \geq 0$ e $H(p_\lambda; p_{\lambda_0}) = 0$ solo se $\lambda = \lambda_0$.

b) Per $p, p_0 \in (0, 1)$, calcolare $H(\mu_p; \mu_{p_0})$, dove μ_p è la densità $\mathrm{Bi}(n, p)$. Provare che $H(\mu_p; \mu_{p_0}) \geq 0$ e $H(\mu_p; \mu_{p_0}) = 0$ solo se $p = p_0$.

Esercizio 12. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x, \text{ con } x, y = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Dire se X e/o Y hanno media ed in caso affermativo, calcolarne le medie. E se esiste, calcolare $\mathbb{E}(X - Y)$.

b) Calcolare la media condizionale di Y dato che $X = x$, per x appartenente ad un insieme opportuno che si chiede di specificare.

Esercizio 13. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\, e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \ldots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per $x = -1, 1$, dire se esiste e in caso affermativo calcolare la media condizionata di Y dato $X = x$.

Esercizio 14. Siano X, Y, Z tre v.a. indipendenti, con legge geometrica di parametro $p \in (0, 1)$. Calcolare la media condizionata di X dato $X + Y$ e di Z dato $X + Y$.

Esercizio 15. In uno schema di Bernoulli, con $p =$probabilità di ottenere 1, calcolare il numero medio di esperimenti che occorre effettuare perché per la prima volta si osservi la sequenza 01.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che, per $\alpha \in (-1, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$.]

Esercizio 16. Una compagnia di assicurazioni ha un numero N (molto grande) di assicurati contro un dato rischio che ha una probabilità p (molto piccola) di colpire ogni singolo assicurato nel corso di un anno (si supponga che il numero N di assicurati e la probabilità p del rischio rimangano costanti nel corso degli anni). Siano X_1 e X_2 il numero di assicurati che la compagnia sarà chiamata ad indennizzare rispettivamente nel primo e nel secondo anno e sia $Z = X_1 + X_2$ il numero totale di indennizzi nei primi due anni. Per la particolare natura del rischio in questione, si può supporre che eventi che si riferiscono ad assicurati diversi siano indipendenti. Si supponga che anche X_1 e X_2 siano indipendenti.

1. Quale legge è ragionevole assumere per le v.a. X_1 e X_2? [Sugg.: si ricordi il comportamento asintotico della distribuzione binomiale...]

2. Sulla base del modello imposto in 1., qual è la distribuzione di Z?

3. La compagnia versa ad ogni assicurato, in caso d'incidente, un indennizzo pari ad I e riceve da ogni assicurato un premio pari a $\frac{5}{4}pI$. Definiamo il "beneficio annuale" della compagnia il denaro guadagnato in un anno, ovvero le entrate meno le uscite di denaro annuali. In media qual è il beneficio della compagnia in un anno?

Supponiamo che la compagnia disponga di capitale iniziale $K = 10^9$ e che $N = 2 \cdot 10^4$, $p = 5 \cdot 10^{-5}$, $I = 10^9$. Ciò significa che dispone di un capitale pari a $K + \frac{5}{4}pNI$ all'inizio del primo anno e incassa $\frac{5}{4}pNI$ all'inizio del secondo anno.

4. Si verifichi che la compagnia si troverà in difficoltà se avverranno più di due incidendi nel primo anno oppure più di tre incidenti nei primi due anni.

5. Qual è la probabilità che la compagnia si trovi in difficoltà allo scadere del secondo anno?

Soluzioni

Esercizio 1. a) Essendo p_{XY} la densità congiunta, dev'essere:

$$1 = \sum_{x \in E_X} \sum_{y \in E_Y} g_1(x) g_2(y) = \sum_{x \in E_X} g_1(x) \sum_{y \in E_Y} g_2(y)$$

e quindi

$$0 < c_1 = \sum_{x \in E_X} g_1(x) < \infty \quad \text{e} \quad 0 < c_2 = \sum_{y \in E_Y} g_2(y) < \infty$$

.

b) Per quanto visto sopra, $1 = c_1 \cdot c_2$.

c) Si ha

$$p_X(x) = \sum_{y \in E_Y} p_{XY}(x, y) = g_1(x) \sum_{y \in E_Y} g_2(y) = c_2 g_1(x) = \frac{1}{c_1} g_1(x)$$

e analogamente per p_X.

Dunque, abbiamo dimostrato che $p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y)$, quindi X e Y sono indipendenti.

Esercizio 2. a) Tutte le funzioni di distribuzione coinvolte nell'esercizio sono costanti a tratti, i punti di salto sono dati dai valori che le v.a. possono assumere ed i salti pari alla probabilità con cui tali valori sono assunti. A titolo di esempio, riportiamo nella Figura 1 la funzione di ripartizione della v.a. X.

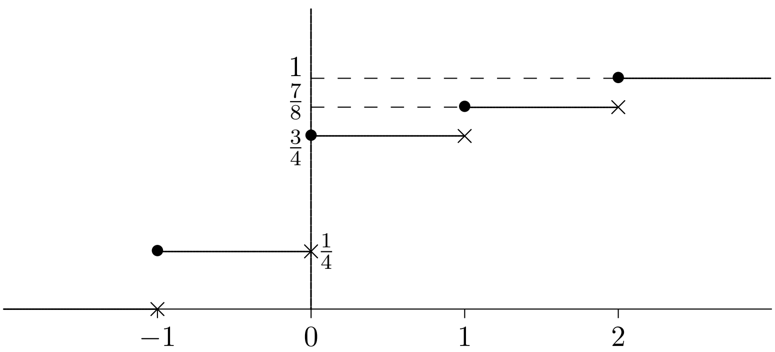

Figura 1 Grafico della funzione di distribuzione della v.a. X dell'esercizio 2.

b) Z può assumere i valori $0, 1, 4$. Inoltre, per $z \in E_Z$, $\{Z = z\} = \{X = -\sqrt{z}\} \cup \{X = \sqrt{z}\}$, e quindi:

$$p_Z(0) = p_X(0) = \frac{1}{2}, \quad p_Z(1) = p_X(1) + p_X(-1) = \frac{3}{8}, \quad p_Z(4) = p_X(2) = \frac{1}{8}.$$

c) $W = Z + Y$ può assumere i valori $0, 1, 2, 4, 5$. Inoltre, X e Y sono indipendenti quindi anche $Z = X^2$ e Y lo sono e si ha

$$\mathbb{P}(W = w) = \mathbb{P}(Z = w, Y = 0) + \mathbb{P}(Z = w - 1, Y = 1) =$$

$$= \mathbb{P}(Z = w)\mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Z = w - 1)\mathbb{P}(Y = 1)$$

da cui segue che

$$p_W(0) = \frac{1}{3}, \quad p_W(1) = \frac{5}{12}, \quad p_W(2) = \frac{1}{8}, \quad p_W(4) = \frac{1}{12}, \quad p_W(5) = \frac{1}{24}.$$

Esercizio 3. a) Per t, u interi ≥ 1, ovviamente $\mathbb{P}(T = t, U = u) = 0$ se $u < t + 1$. Se invece $u \geq t + 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = t, U = u) &= \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_{t-1} = 0, X_t = 1, X_{t+1} = \cdots = X_{u-1} = 0, X_u = 1) \\ &= (1-p)^{t-1} \cdot p \cdot (1-p)^{u-t-1} \cdot p = p^2(1-p)^{u-2}.\end{aligned}$$

Quindi, per t, u interi,

$$p_{T,U}(t, u) = \begin{cases} p^2(1-p)^{u-2} & \text{se } u \geq t + 1 \geq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcoliamo le distribuzioni marginali. Per $t \geq 1$,

$$\begin{aligned}p_T(t) &= \sum_u p_{T,U}(t, u) = \sum_{u=t+1}^{+\infty} p^2(1-p)^{u-2} = p^2(1-p)^{t-1} \sum_{u=t+1}^{+\infty} (1-p)^{u-(t+1)} \\ &= p^2(1-p)^{t-1} \frac{1}{1-(1-p)} = p(1-p)^{t-1}\end{aligned}$$

(come d'altro canto sapevamo già!) e per $u \geq 2$,

$$p_U(u) = \sum_t p_{T,U}(t, u) = \sum_{t=1}^{u-1} p^2(1-p)^{u-2} = (u-1)p^2(1-p)^{u-2}$$

b) Si ha

$$p_{T,V}(t, v) = \mathbb{P}(T = t, V = v) = \mathbb{P}(T = t, U - T = v) = \mathbb{P}(T = t, U = v - t)$$

quindi

$$p_{T,V}(t, v) = \begin{cases} p^2(1-p)^{v-t-2} & \text{se } v \geq 1, t \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

cioè, per $t, v \geq 1$, $p_{T,V}(t, v) = p(1-p)^{t-1} \cdot p(1-p)^{v-1} = p_T(t)\varphi(v)$. Ma allora necessariamente $\varphi(v) = p_V(v)$ e le v.a. T e V sono indipendenti.

c) Si ha

$$\mathbb{P}(U > T + k) = \mathbb{P}(V > k) = \sum_{v=k+1}^{+\infty} p_V(v) = \sum_{v=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{v-1}$$

$$= p(1-p)^k \sum_{v=k+1}^{+\infty} (1-p)^{v-(k+1)} = p(1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k$$

e $\mathbb{P}(U > T + k) < 0.1$ se e solo se $(1-p)^k < 0.1$, cioè $k > \frac{\ln 0.1}{\ln(1-p)}$.

Esercizio 4. **a)** Calcoliamo dapprima la densità discreta di X: per $x = 0, 1, \ldots$,

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x, y) = \sum_{y=x}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{x!(y-x)!} = \frac{e^{-2}}{x!} \sum_{y=x}^{+\infty} \frac{1}{(y-x)!} = \frac{e^{-2}}{x!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$
$$= \frac{e^{-2}}{x!} \cdot e = \frac{e^{-1}}{x!},$$

cioè $X \sim \mathrm{Po}(1)$. Quindi, se $x \geq 0$, si ha

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)} = \begin{cases} \frac{e^{-1}}{(y-x)!} & \text{se } y = x, x+1, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) Si ha

$$p_{Z,W}(z, w) = \mathbb{P}(X + 1 = z, Y - X = w) = \mathbb{P}(X = z - 1, Y = z + w - 1)$$
$$= p_{XY}(z - 1, z + w - 1).$$

Ora, $p_{XY}(z-1, z+w-1) \neq 0$ se e solo se $z-1 = 0, 1, \ldots$, $z+w-1 = 0, 1, \ldots$ e $z+w-1 \geq z-1$, il che equivale a dire: $z = 1, 2, \ldots$ e $w = 0, 1, \ldots$. In tal caso,

$$p_{XY}(z - 1, z + w - 1) = \frac{e^{-2}}{(z-1)!w!}.$$

Ma allora

$$p_{Z,W}(z, w) = g_1(z)g_2(w), \text{ con } g_1(z) = \frac{e^{-1}}{(z-1)!} \mathbb{1}_{z=1,2,\ldots} \quad \text{e} \quad g_2(w) = \frac{e^{-1}}{w!} \mathbb{1}_{w=0,1,2,\ldots}.$$

Da qui si deduce che Z e W sono indipendenti ed inoltre (avendo già messo a posto le costanti!) $p_Z = g_1$ e $p_W = g_2$. In particolare, $W \sim \mathrm{Po}(1)$.

Esercizio 5. **a)** Poiché $X > 0$, la v.a. Y/X è effettivamente ben posta e si ha

$$p_W(w) = \sum_z \mathbb{P}(X = z, Y/X = w) = \sum_z \mathbb{P}(X = z, Y = zw) = \sum_z p_{XY}(z, zw)$$

da cui segue che $p_W(w) = 0$ se $w \notin \{-1, 0, 1\}$ e in caso contrario

$$p_W(w) = \sum_z p_{XY}(z, zw) = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{1}{(z-1)!} e^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Ricapitolando,

$$p_W(w) = \frac{1}{3} \mathbb{1}_{z \in \{-1,0,1\}}$$

cioè $W \sim \mathrm{Un}(\{-1, 0, 1\})$.

b) Si ha

$$p_{X+Y}(z) = \sum_x p_{X,Y}(x, z - x) = \sum_x \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)!} e^{-1} \mathbb{1}_{x=1,2,\ldots} \mathbb{1}_{z-x \in \{-x,0,x\}}$$
$$= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)!} e^{-1} \mathbb{1}_{z-x \in \{-x,0,x\}}.$$

Osserviamo che la condizione $z - x \in \{-x, 0, x\}$ dà $z = z - x + x \in \{0, x, 2x\}$. Quindi, essendo $x \geq 1$, otteniamo in particolare che $z \geq 0$. Dunque, possiamo dire che $p_{X+Y}(z) = 0$ per $z < 0$. Prendiamo ora $z \geq 0$. Si ha:

* $z - x = -x$ se e solo se $z = 0$;
* $z - x = 0$ se e solo se $z = x$;
* $z - x = x$ se e solo se $z = 2x$.

Quindi, essendo $x \geq 1$ nella sommatoria, possiamo dire che per $x \geq 1$ si ha

$$\mathbb{1}_{z-x\in\{-x,0,x\}} = \mathbb{1}_{z=0} + \mathbb{1}_{z=x} + \mathbb{1}_{z=2x}.$$

Otteniamo allora,

$$p_{X+Y}(z) = \frac{1}{3}\,e^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{(x-1)!}(\mathbb{1}_{z=0} + \mathbb{1}_{z=x} + \mathbb{1}_{z=2x}).$$

Dunque, se $z = 0$ rimane

$$p_{X+Y}(0) = \frac{1}{3}\,e^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{(x-1)!} = \frac{1}{3}\,e^{-1}\times e = \frac{1}{3}.$$

Se invece $z \geq 1$, dobbiamo distinguere se z quando z è pari e quando z è dispari. Infatti, se z è pari,

$$\begin{aligned}
p_{X+Y}(z) &= \frac{1}{3}\,e^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{(x-1)!}(\underbrace{\mathbb{1}_{z=x}}_{\neq 0 \text{ sse } x=z} + \underbrace{\mathbb{1}_{z=2x}}_{\neq 0 \text{ sse } x=z/2})\\
&= \frac{1}{3}\,e^{-1}\Big(\frac{1}{(z-1)!} + \frac{1}{(\frac{z}{2}-1)!}\Big)
\end{aligned}$$

Se invece z è dispari, nella sommatoria rimane solo il contrubuto di $x = z$, e si ottiene:

$$p_{X+Y}(z) = \frac{1}{3}\,e^{-1}\frac{1}{(z-1)!}.$$

Ricapitolando,

$$p_{X+Y}(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } z = 0;\\ \frac{1}{3}\,e^{-1}\Big(\frac{1}{(2k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!}\Big) & \text{se } z = 2k, \exists k \geq 1;\\ \frac{1}{3}\,e^{-1}\frac{1}{(2k-2)!} & \text{se } z = 2k-1, \exists k \geq 1. \end{cases}$$

Nota: verifichiamo che $\sum_z p_{X+Y}(z) = 1$: fa comodo spezzare la sommatoria per $z = 0$, per z

pari e per z dispari, quindi

$$\begin{aligned}
\sum_z p_{X+Y}(z) &= p_{X+Y}(0) + \sum_{k\geq 1} p_{X+Y}(2k) + \sum_{k\geq 1} p_{X+Y}(2k-1) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, e^{-1} \sum_{k\geq 1} \Big(\frac{1}{(2k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!} \Big) + \frac{1}{3}\, e^{-1} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-2)!} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, e^{-1} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{3}\, e^{-1} \Big(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)!} + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-2)!} \Big) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, e^{-1} \times e + \frac{1}{3}\, e^{-1} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\, e^{-1} \times e = 1
\end{aligned}$$

Esercizio 6. a) Se fosse noto il numero di volte in cui la moneta viene tirata, sapremmo che S è una v.a. binomiale:

$$p_{S|N}(k\,|\,n) = \mathbb{P}(S = k\,|\,N = n) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > n \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{se } 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

Quindi,

$$\mathbb{P}(S = 0) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S = 0\,|\,N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n\geq 1} \Big(\frac{1-p}{2} \Big)^n = \frac{1}{1 - \frac{1-p}{2}} - 1 = \frac{1-p}{1+p}$$

b) Si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = k) &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S = k\,|\,N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{p^k}{2^k k!} \sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} \Big(\frac{1-p}{2} \Big)^{n-k} = \frac{p^k}{2^k k!} \frac{k!}{(1 - \frac{1-p}{2})^{k+1}} = \frac{2p^k}{(1+p)^{k+1}}
\end{aligned}$$

La distribuzione di S è:

$$p_S(k) = \begin{cases} \frac{1-p}{1+p} & \text{se } k = 0 \\ \frac{2p^k}{(1+p)^{k+1}} & \text{se } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Come verifica, studiamo $\sum_k p_S(k)$:

$$\sum_k p_S(k) = \sum_{k\geq 0} p_S(k) = \underbrace{\frac{1-p}{1+p}}_{=p_S(0)} + \sum_{k\geq 1} \frac{2p^k}{(1+p)^{k+1}}$$

$$= \frac{1-p}{1+p} + \frac{2p}{(1+p)^2} \sum_{k\geq 1} \Big(\frac{p}{1+p} \Big)^{k-1} = \frac{1-p}{1+p} + \frac{2p}{(1+p)^2} \frac{1}{1 - \frac{p}{1+p}} = 1$$

Per calcolare il numero medio di teste osservate, verifichiamo l'esistenza di $\mathbb{E}(S)$. Poiché S è una v.a. non negativa, dimostrare l'esistenza e calcolare $\mathbb{E}(S)$ di fatto sono equivalenti:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \sum_k k p_S(k) = 0 + \sum_{k\geq 1} k \frac{2p^k}{(1+p)^{k+1}} = \frac{2p}{(1+p)^2} \sum_{k\geq 1} k \Big(\frac{p}{1+p}\Big)^{k-1} \\ &= \frac{2p}{(1+p)^2}\Big(1-\frac{p}{1+p}\Big)^{-1} \sum_{k\geq 1} k \Big(\frac{p}{1+p}\Big)^{k-1}\Big(1-\frac{p}{1+p}\Big)\end{aligned}$$

Nell'ultima somma riconosciamo la media della legge geometrica modificata di parametro $1 - \frac{p}{1+p} = \frac{1}{1+p}$, che è uguale all'inverso del parametro e dunque $1+p$. Otteniamo quindi:

$$\mathbb{E}(S) = \frac{2p}{(1+p)^2}(1+p) \times (1+p) = 2p.$$

Si noti inoltre che se $p = 1$ allora $S = N$, quindi $\mathbb{E}(N) = 2$: in media la moneta è tirata solo due volte.

c) Si ha:

$$p_{S,N}(k,n) = p_{S|N}(k\,|\,n)p_N(n) = \begin{cases} \frac{1-p}{2^n(1+p)} & \text{se } k=0 \text{ e } n\geq 1 \\ \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} & \text{se } k\geq 1 \text{ e } n \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

d) Si chiede, per ogni $k \geq 0$ fissato, $p_{N|S}(n\,|\,k) = \mathbb{P}(N = n\,|\,S = k)$, al variare di $n \geq 1$. Si potrebbe usare la distribuzione congiunta, oppure la formula di Bayes. In ogni caso, si ottiene:

- caso $k = 0$:

$$p_{N|S}(n\,|\,0) = \begin{cases} \frac{1+p}{2}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-1} & \text{se } n = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

- caso $k \geq 1$:

$$p_{N|S}(n\,|\,k) = \begin{cases} \binom{n}{k}\frac{(1-p)^{n-k}(1+p)^{k+1}}{2^{n+1}} & \text{se } n = k, k+1, k+2, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Quindi, se $k = 0$, $n \mapsto p_{N|S}(n \mid 0)$ è una legge geometrica modificata di parametro $q = \frac{1+p}{2}$, dunque $\sum_n p_{N|S}(n \mid 0) = 1$ e anche

$$\mathbb{E}(N \mid S = 0) = \frac{1}{q} = \frac{2}{1+p}.$$

Se invece $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_n p_{N|S}(n\,|\,k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}\frac{(1-p)^{n-k}(1+p)^{k+1}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{(1+p)^{k+1}}{k!\,2^{k+1}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^{n-k} \\ &= \frac{(1+p)^{k+1}}{k!\,2^{k+1}} \frac{k!}{(1-\frac{1-p}{2})^{k+1}} = 1.\end{aligned}$$

Calcoliamo la media condizionale: per $k = 1, 2, \dots,$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N \mid S = k) &= \sum_n n p_{N|S}(n \mid k) = \sum_{n=k}^{\infty} n \binom{n}{k} \frac{(1-p)^{n-k}(1+p)^{k+1}}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} (n-k+k) \binom{n}{k} \frac{(1-p)^{n-k}(1+p)^{k+1}}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} (n-k) \binom{n}{k} \frac{(1-p)^{n-k}(1+p)^{k+1}}{2^{n+1}} + \\
&\qquad + k \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(1-p)^{n-k}(1+p)^{k+1}}{2^{n+1}}}_{=1} \\
&= k + \frac{1}{k!}\,(1-p)\Big(\frac{1+p}{2}\Big)^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k-1)!}\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^{n-(k+1)} \\
&= k + \frac{1}{k!}\,(1-p)\Big(\frac{1+p}{2}\Big)^{k+1} (k+1)!\Big(1 - \frac{1-p}{2}\Big)^{-(k+2)} \\
&= k + 2(k+1)\,\frac{1-p}{1+p}.
\end{aligned}$$

e) Si ha

$$\mathbb{P}(N \text{ pari} \,|\, S = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{N\,|\,S}(2n \,|\, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+p}{1-p}\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^{2n}$$
$$= \frac{1+p}{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^2\Big)^n = \frac{1+p}{1-p}\Big(\frac{1}{1-(\frac{1-p}{2})^2} - 1\Big) = \frac{1-p}{3-p}.$$

Esercizio 7. 1)

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p^2 (1-p)^{2k} = p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p};$$

2)

$$\mathbb{P}(X \geq 2Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k, X \geq 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(X \geq 2k)$$

dove

$$\mathbb{P}(X \geq 2k) = \sum_{j=2k}^{\infty} p(1-p)^j = p(1-p)^{2k} \sum_{j=2k}^{\infty} (1-p)^{j-2k} = p(1-p)^{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (1-p)^{\ell} = (1-p)^{2k},$$

quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 2Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(X \geq 2k) = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{3k} \\
&= p \frac{1}{1-(1-p)^3} = \frac{1}{1+(1-p)+(1-p)^2};
\end{aligned}$$

Esercizio 8. Usiamo lo schema successo-insuccesso. Qui, successo = la telefonata giunge all'operatore; insuccesso = la telefonata viene smistata ad altro servizio. Consideriamo quindi le v.a. $X_1, X_2, \ldots$, dove $X_i \in \{0,1\}$ e $\{X_i = 1\}$ è l'evento "la i-esima telefonata raggiunge l'operatore", dunque $X_i \sim \mathrm{Be}(p)$ per ogni i. Per ipotesi, abbiamo che $N, X_1, X_2, \ldots$ sono v.a. indipendenti. Poiché possono arrivare N telefonate al giorno, il numero giornaliero di telefonate che giungono all'operatore è dato da

$$S_N = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 0, \\ X_1 + X_2 + \ldots + X_N & \text{se } N \geq 1 \end{cases}$$

(per ipotesi, $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, quindi l'evento $\{N = 0\}$ accade con probabilità positiva). Si chiede $\mathbb{P}(S_N = k)$, dove $k \in \{0, 1, \ldots\}$, altrimenti la probabilità richiesta è nulla. Studiamo i casi: 1) $p = 0$; 2) $p = 1$; 3) $p \in (0,1)$.

1) Qui $S_N = 0$, quindi $\mathbb{P}(S_N = 0) = 1$ e $\mathbb{P}(S_N = k) = 0$ per ogni $k \geq 1$.
2) Qui $S_N = N \sim \mathbb{P}(\lambda)$, quindi $\mathbb{P}(S_N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \geq 0$.
3) Questo è il caso più interessante. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_N = k) &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_N = k, N = n) = \mathbb{P}(S_N = k, N = 0) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_N = k, N = n) \\ &= \mathbb{P}(S_n = k, N = n), \end{aligned}$$

dove abbimo posto $S_n = 0$ quando $n = 0$. Ma S_n è una costante oppure una funzione di $X_1, \ldots, X_n$. Poiché $X_1, \ldots, X_n, N$ sono indipendenti, si ha $S_n \perp\!\!\!\perp N$. Allora, ricordando che $S_n \sim \mathrm{Bi}(n, p)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_N = k) &= \sum_{n \geq 0} \underbrace{\mathbb{P}(S_n = k)}_{= 0 \text{ se } n < k} \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n \geq k} \frac{1}{(n-k)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-k} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{\ell!} \big(\lambda(1-p)\big)^{\ell} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \times e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

e quindi $S_N \sim \mathrm{Po}(\lambda p)$.

Esercizio 9. a) Poiché ϕ e ψ sono funzioni limitate, $\phi(X)$ e $\psi(Y)$ e $\phi(X)\psi(Y)$ sono v.a. limitate, quindi con speranza matematica finita.

b) Se X e Y sono indipendenti allora $\phi(X)$ e $\psi(Y)$ sono indipendenti. Ed avendo speranza matematica finita, anche $\phi(X)\psi(Y)$ ha speranza matematica finita e si ha $\mathbb{E}(\phi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(\phi(X))\mathbb{E}(\psi(Y))$.

c) Si ha $\mathbb{E}(\phi(X)) = \mathbb{E}(1\!\!1_{\{X=x_0\}}) = \mathbb{P}(X = x_0) = p_X(x_0)$ e analogamente, $\mathbb{E}(\psi(Y)) = p_Y(y_0)$. Poi, $\phi(X)\psi(Y) = 1\!\!1_{\{X=x_0\}}1\!\!1_{\{Y=y_0\}} = 1\!\!1_{\{X=x_0,Y=y_0\}}$, e quindi $\mathbb{E}(\phi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(1\!\!1_{\{X=x_0,Y=y_0\}}) = \mathbb{P}(X = x_0, Y = y_0) = p_{XY}(x_0, y_0)$.
d) Se X e Y sono indipendenti, la tesi è stata dimostrata in **a)** e **b)**. Se viceversa vale la fattorizzazione, da **c)** segue che $p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ per ogni $x \in E_X$ e $y \in E_Y$, quindi X e Y sono indipendenti.

Esercizio 10. La tesi segue immediatamente dal fatto che la legge condizionale di X noto che $Y = y$ coincide con la legge di X.

Esercizio 11. a) Ricordiamo che

$$p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

quindi $p_\lambda \ll p_{\lambda_0}$. E si ha

$$\begin{aligned} H(p_\lambda; p_{\lambda_0}) &= \sum_{k\geq 0} \log \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{\lambda_0^k\, e^{-\lambda_0}}\, \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} = \sum_{k\geq 0} \Big(k \log \frac{\lambda}{\lambda_0} + \lambda_0 - \lambda\Big) \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} \\ &= \log \frac{\lambda}{\lambda_0} \sum_{k\geq 0} k\, \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} + (\lambda_0 - \lambda) \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Ora, nella prima somma riconosciamo la media della legge $\mathrm{Po}(\lambda)$, che vale λ, e la seconda somma vale 1. Quindi,

$$H(p_\lambda; p_{\lambda_0}) = \lambda \log \frac{\lambda}{\lambda_0} + \lambda_0 - \lambda.$$

Posto quindi $g(\lambda) = \lambda \log \frac{\lambda}{\lambda_0} + \lambda - \lambda_0$, otteniamo $g(\lambda_0) = 0$ se $\lambda = \lambda_0$. Poi,

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = \log \frac{\lambda}{\lambda_0} = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \lambda = \lambda_0$$

e

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} g(\lambda) = \frac{1}{\lambda} > 0.$$

Quindi, per $\lambda > 0$, g descresce fino a λ_0 e dopo λ_0 cresce. Dunque, λ_0 è un punto di minimo: $g(\lambda) \geq g(\lambda_0) = 0$, da cui ovviamente segue che $H(p_\lambda; p_{\lambda_0}) \geq 0$.
b) Ricordiamo che

$$\mu_p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

quindi $\mu_p \ll \mu_{p_0}$ (perché il parametro n è lo stesso!!!). E si ha

$$\begin{aligned} H(\mu_p; \mu_{p_0}) &= \sum_{k=0}^n \log \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \Big(k \log \frac{p}{p_0} + (n-k) \log \frac{1-p}{1-p_0}\Big) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \log \frac{p}{p_0} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \log \frac{1-p}{1-p_0} \sum_{k=0}^n (n-k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Ora, presa $X \sim \mathrm{Bi}(n,p)$, la prima somma vale $\mathbb{E}(X) = np$ e la seconda somma non è altro che $\mathbb{E}(n-X) = n - np = n(1-p)$. Otteniamo quindi

$$H(\mu_p; \mu_{p_0}) = np \log \frac{p}{p_0} + n(1-p) \log \frac{1-p}{1-p_0}.$$

Dunque, si vede subito che se $p = p_0$ si ha $H(\mu_p; \mu_{p_0}) = 0$. Inoltre,

$$\frac{d}{dp} H(\mu_p; \mu_{p_0}) = n\Big(\log \frac{p}{p_0} - n \log \frac{1-p}{1-p_0} \Big) \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dp^2} H(\mu_p; \mu_{p_0}) = n\Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \Big).$$

In particolare, $\frac{d^2}{dp^2} H(\mu_p; \mu_{p_0}) \geq 0$, dunque $p \mapsto H(\mu_p; \mu_{p_0})$ è convessa. Essendo poi $\frac{d}{dp} H(\mu_p; \mu_{p_0})|_{p=p_0} = 0$, p_0 è un punto di minimo, quindi $H(\mu_p; \mu_{p_0}) \geq H(\mu_p; \mu_{p_0})|_{p=p_0} = 0$.

Esercizio 12. a) Calcoliamo le densità marginali. Per $x = 0, 1, \ldots$,

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_y p_{XY}(x,y) = \sum_{y=x}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{x!(y-x)!} = \frac{e^{-2}}{x!} \sum_{y=x}^{+\infty} \frac{1}{(y-x)!} = \frac{e^{-2}}{x!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{e^{-2}}{x!} \cdot e = \frac{e^{-1}}{x!}, \end{aligned}$$

cioè $X \sim \mathrm{Po}(1)$. Poi, per $y = 0, 1, \ldots$,

$$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y) = \sum_{x=0}^{y} \frac{e^{-2}}{x!(y-x)!} = \frac{e^{-2}}{y!} \sum_{x=0}^{y} \binom{y}{x} = \frac{e^{-2}}{y!} 2^y$$

cioè $Y \sim \mathrm{Po}(2)$. Quindi, X e Y hanno entrambe media e

$$\mathbb{E}(X) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(Y) = 2.$$

Per linearità, anche $X - Y$ ha media e $\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 1 - 2 = -1$.
b) Per $x \geq 0$, si ha

$$p_{Y|X}(y \,|\, x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)} = \begin{cases} \frac{e^{-1}}{(y-x)!} & \text{se } y = x, x+1, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y \,|\, X = x) &= \sum_y y \, p_{Y|X}(y \,|\, x) = \sum_{y=x}^{+\infty} y \cdot \frac{e^{-1}}{(y-x)!} \\ &= \sum_{y=x}^{+\infty} (y-x) \cdot \frac{e^{-1}}{(y-x)!} + \sum_{y=x}^{+\infty} x \cdot \frac{e^{-1}}{(y-x)!} \\ &= e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + x \cdot 1 = e^{-1} \cdot e + x = 1 + x. \end{aligned}$$

Esercizio 13. $x = -1$ non è un valore ammissibile per X, cioè $p_X(-1) = 0$, dunque la media condizionata all'evento $\{X = -1\}$ non ha senso. Lavoriamo dunque con $x = 1$. Si ha, per $x = 1$ ma anche $x = 2, 3, \ldots$,

$$p_{Y|X}(y \,|\, x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)},$$

dove

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y) = \sum_{y\in\{-x,0,x\}} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1}\cdot 3 = \frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1}$$

(cioè, X si distribuisce come una v.a. Po(1)+1). Allora,

$$p_{Y|X}(y\,|\,x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } y=-x,0,x \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e $\mathbb{E}(Y\mid X=x) = \sum_y y\, p_{Y|X}(y\,|\,x) = 0$ (perché la legge di Y dato $X=x$ è una legge uniforme su $\{-x,0,x\}$, con $x=1,2,\ldots$).

Esercizio 14. 1) Cerchiamo la distribuzione congiunta di X e $X+Y$:

$$p_{X,X+Y}(i,j) = \mathbb{P}(X=i, Y=j-i) = \begin{cases} p^2(1-p)^j & \text{se } j\geq i\geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La marginale di $X+Y$ vale

$$p_{X+Y}(j) = \sum_i p_{X,X+Y}(i,j) = \sum_{i=0}^{j} p^2(1-p)^j = (j+1)p^2(1-p)^j$$

con $j\geq 0$. Fissato $j\geq 0$, la distribuzione condizionata è

$$p_{X\,|X+Y}(i\,|j) = \frac{p_{X,X+Y}(i,j)}{p_{X+Y}(j)} = \begin{cases} \frac{1}{j+1} & \text{se } 0\leq i\leq j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

cioè $X\,|X+Y=j$ si distribuisce uniformemente nell'insieme $\{0,1,\ldots,j\}$. Allora, ancora fissato $j\geq 0$,

$$\mathbb{E}(X\,|X+Y=j) = \sum_i i p_{X\,|X+Y}(i\,|j) = \frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j} i = \frac{1}{j+1}\,\frac{j(j+1)}{2} = \frac{j}{2}.$$

2) Poiché Z è indipendente sia da X che da Y, Z è indipendente da $X+Y$, si ha $\mathbb{E}(Z\,|X+Y=j) = \mathbb{E}(Z) = \frac{1-p}{p}$.

Esercizio 15. Indicando con $X_1, X_2, \ldots$ lo schema di Bernoulli, possiamo scrivere

$$T = \inf\{n\geq 2 \,:\, X_{n-1}=0 \text{ e } X_n=1\}.$$

Si chiede $\mathbb{E}(T)$, calcoliamo quindi la distribuzione di T.
Il punto è che $\{T=k\} = \cup_{j=0}^{n-2} A_j$, dove

$$A_j = \begin{cases} \{X_1=\cdots=X_{n-2}=0, X_{n-1}=0, X_n=1\} & \text{se } j=0, \\ \{X_1=\cdots=X_j=1, X_{j+1}=\cdots=X_{n-2}=0, X_{n-1}=0, X_n=1\} & \text{se } j\geq 1. \end{cases}$$

Poiché gli A_j sono disgiunti e $\mathbb{P}(A_j) = p^j\cdot(1-p)^{n-2-j}\cdot(1-p)\cdot p = p^{j+1}(1-p)^{n-1-j}$, si ha

$$p_T(n) = \sum_{j=0}^{n-2}\mathbb{P}(A_j) = \sum_{j=0}^{n-2} p^{j+1}(1-p)^{n-1-j} = p(1-p)^{n-1}\sum_{j=0}^{n-2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^j$$

$$= p(1-p)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{n-1}}{1-\frac{p}{1-p}} = p(1-p)\frac{(1-p)^{n-1}-p^{n-1}}{1-2p}$$

(si noti che in effetti $p_T(n) > 0$ per ogni $k \geq n$). Possiamo ora calcolare la media di T:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\, p_T(n) = \sum_{n=2}^{\infty} n\, p(1-p)\frac{(1-p)^{n-1} - p^{n-1}}{1-2p} \\ &= \frac{p(1-p)}{1-2p}\Big(\sum_{n=2}^{\infty} n\,(1-p)^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n\, p^{n-1}\Big).\end{aligned}$$

Sappiamo che, per $\alpha \in (-1,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$, quindi $\sum_{n=2}^{\infty} n\,\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 = \frac{\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)^2}$. Allora,

$$\mathbb{E}(T) = \frac{p(1-p)}{1-2p}\Big(\frac{(1-p)(2-(1-p))}{(1-(1-p))^2} - \frac{p(2-p)}{(1-p)^2}\Big) = \frac{1}{p(1-p)}.$$

Esercizio 16. 1. Un modello abbastanza ragionevole per X_1 e X_2 è quello binomiale: X_1 e X_2 contano il numero di successi (successo = verificarsi del rischio), che avviene con probabilità p, su un numero N (= numero di persone interessate al rischio) di prove indipendenti. Quindi, $X_1, X_2 \sim \mathrm{Bi}(N,p)$. Ora, poiché N è molto grande e p è piccolo, la distribuzione binomiale è ben approssimata dalla distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = Np$: per $i = 1,2$,

$$p_{X_i}(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Useremo questo come modello probabilistico per X_1 e X_2.

2. $Z = X_1 + X_2$, con X_1, X_2 indipendenti, ciascuna $\mathrm{Po}(Np)$. Allora, è noto che $Z = X_1 + X_2 \sim \mathrm{Po}(2Np)$.

3. Il beneficio B della compagnia in un anno è dato dai premi incassati meno gli indennizzi:

$$B = \frac{5}{4}p\, I \cdot N - I \cdot X_1.$$

Quindi, il beneficio medio è[1]

$$\mathbb{E}[B] = \mathbb{E}\Big[\frac{5}{4}p\, I\, N - I\, X_1\Big] = \frac{5}{4}p\, N\, I - I\mathbb{E}[X_1] = \frac{5}{4}p\, N\, I - I\, N\, p = \frac{1}{4}p\, N\, I.$$

4. Allo scadere del primo anno i ricavi della compagnia sono

$$K + \frac{5}{4}p\, N\, I - X_1\, I$$

e si troverà in difficoltà se tale quantità risultasse negativa: $K + \frac{5}{4}p\, N\, I - I\, X_1 < 0$, ovvero

$$X_1 > \frac{K + \frac{5}{4}p\, N\, I}{I}.$$

Sostituendo i dati del problema, la compagnia si troverà in difficoltà alla fine del primo anno se

$$X_1 > 1 + \frac{5}{4} 5 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^4 = \frac{9}{4}$$

[1] Si ricorda che $\mathbb{E}(X) = \lambda$ se $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.

e cioè se avverranno più di 2 incidenti. Allo scadere del secondo anno, i ricavi sono

$$K + \frac{5}{4} p\,N\,I - X_1 + \frac{5}{4} p\,N\,I - X_2\,I = K + \frac{5}{2} p\,N\,I - Z\,I.$$

Dunque, sorgeranno dei problemi economici qualora

$$Z > 1 + \frac{5}{2} \cdot 5\,10^{-5} \cdot 2\,10^{4} = \frac{14}{4}$$

ovvero, se si verificheranno più di 3 incidenti nei primi due anni.

5. L'evento "la compagnia si troverà in difficoltà allo scadere del secondo anno" equivale a dire che avverranno più di due incidenti nel primo anno oppure più di tre incidenti nei primi due anni. Quindi, si richiede $\mathbb{P}(\{X_1 > 2\} \cup \{Z > 3\})$. Per calcolare questa probabilità, occorre la distribuzione congiunta di X_1 e Z.
Per $x, z \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} p_{X_1,Z}(x,z) &= \mathbb{P}(X_1 = x, Z = z) = \mathbb{P}(X_1 = x, X_1 + X_2 = z) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x, X_2 = z - x) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_2 = z - x) \end{aligned}$$

che è zero per $x < 0$ oppure $z - x < 0$. Per $z \geq x \geq 0$ interi, si ha, ponendo $\lambda = Np$,

$$p_{X_1\,Z}(x,z) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{z-x}}{(z-x)!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^z}{x!\,(z-x)!} e^{-2\lambda}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X_1 > 2\} \cup \{Z > 3\}) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 2, Z \leq 3) \\ &= 1 - \Big(p_{X_1,Z}(0,0) + p_{X_1,Z}(0,1) + p_{X_1,Z}(0,2) \\ &+ p_{X_1,Z}(0,3) + p_{X_1,Z}(1,1) + p_{X_1,Z}(1,2) + p_{X_1,Z}(1,3) + p_{X_1,Z}(2,3)\Big) \\ &= 1 - e^{-2\lambda}\Big(1 + \lambda(1+1) + \lambda^2(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}) + \lambda^3(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6})\Big). \end{aligned}$$

Poiché $\lambda = Np = 1$,

$$\mathbb{P}(\{X_1 > 2\} \cup \{Z > 3\}) = 0.142.$$