Tutorato III
Probabilità e Statistica
a.a. 2015/2016

Argomenti: legge di Poisson; funzioni di ripartizione; leggi congiunte e marginali; leggi condizionali.

Esercizio 1. All'inizio di ogni mese un commerciante ordina un certo prodotto per le vendite di tutto il mese. Egli può plausibilmente supporre che il numero di unità di quel prodotto richieste in un mese segua una legge di Poisson, di parametro $\lambda = 4$. Qual è il numero minimo di unità che deve ordinare perché al 90% non resti senza quel prodotto[1]?

Esercizio 2. Sia X una v.a. con funzione di distribuzione F_X: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che[2], per ogni $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$,

(a) $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$;

(b) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$;

(c) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$;

(d) $\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$;

(e) $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$.

Esercizio 3. Siano date le seguenti funzioni[3]:

$$
\begin{aligned}
&F_1(x) = \left(1 - \tfrac{1}{2+x}\right) \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}, \qquad F_2(x) = \left(1 - \tfrac{1}{2+x}\right) \mathbb{1}_{\{x > 0\}},\\
&F_3(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \mathbb{1}_{\{x > 0\}}, \qquad F_4(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}},\\
&F_5(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{-8 \leq x < -1\}} + \frac{3}{4} \mathbb{1}_{\{-1 \leq x \leq 72\}} + \mathbb{1}_{\{x > 72\}},\\
&F_6(x) = -\frac{3}{4} \mathbb{1}_{\{x < -8\}} - \frac{1}{4} \mathbb{1}_{\{-8 \leq x < -1\}} + \frac{3}{4} \mathbb{1}_{\{x < 72\}} + \mathbb{1}_{\{x \geq 72\}}\\
&F_7(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{-8 \leq x < -1\}} + \frac{3}{4} \mathbb{1}_{\{x < 72\}} + \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

Per ogni $i = 1, \ldots, 7$, disegnare F_i e dire se F_i può essere la funzione di ripartizione di qualche v.a.[4] X_i e in caso affermativo, dire quanto vale $\mathbb{P}(X_i = x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

[1] Ricordiamo che $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ se $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ quando $k \in \mathbb{N}$ e $p_X(k) = 0$ altrimenti. Per $X \sim \mathrm{Po}(4)$, potrebbe essere utile usare la seguente tabella: per $k = 0, 1, \ldots$,

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
$p_X(k) =$	0.018	0.073	0.147	0.195	0.195	0.156	0.104	0.060	0.030	0.013	$\cdots$

[2] Si ricorda che $F_X(x^-) = \lim_{n\to\infty} F_X(x - 1/n)$.

[3] Si ricorda che, per $A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_{\{x \in A\}}$ o anche $\mathbb{1}_A(x)$ vale 1 per $x \in A$ e 0 altrimenti.

[4] Ovvero, F_i soddisfa alle 3 proprietà caratteristiche: 1) F_i è monotona non decrescente; 2) $\lim_{x\to-\infty} F_i(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F_i(x) = 1$; 3) F_i è càdlàg, cioè continua da destra ($F_i(x^+) = F_i(x)$) e limitata da sinistra ($F_i(x^-)$ finito).

Esercizio 4. Sia X una v.a discreta, a valori in E_X, con densità discreta $p_X(x)$, $x \in E_X$, e funzione di distribuzione $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Fissato $N \geq 1$, siano Y_N e Z_N due "troncamenti" di X:

$$Y_N = \begin{cases} -N & \text{se } X < -N \\ X & \text{se } |X| \leq N \\ N & \text{se } X > N \end{cases} \qquad Z_N = \begin{cases} X & \text{se } |X| \leq N \\ 0 & \text{se } |X| > N \end{cases}$$

o, equivalentemente, $Y_N = -N 1\!\!1_{\{X<-N\}} + X 1\!\!1_{\{|X|\leq N\}} + N 1\!\!1_{\{X>N\}}$ e $Z_N = X 1\!\!1_{\{|X|\leq N\}}$.

(a) Dire quali valori possono assumere Y_N e Z_N e con quale probabilità. Giustificare il termine "troncamento".

(b) Disegnare le funzioni di ripartizione G_N e H_N rispettivamente di Y_N e Z_N.

(c) Come si comportano G_N e H_N quando $N \to +\infty$?

Esercizio 5. Due giocatori (Tizio e Caio) ed il banco (Sempronio) lanciano un dado ciascuno. Un giocatore vince se ottiene un risultato non inferiore a quello dell'altro giocatore e superiore al risultato del banco, altrimenti vince il banco.

a) Posto X = risultato di Tizio, Y = risultato di Caio, Z = risultato di Sempronio, scrivere la densità congiunta $p_{X,Y,Z}(x, y, z)$ di X, Y e Z. Calcolare di conseguenza le relative marginali a due a due ($p_{X,Y}$, $p_{X,Z}$ e $p_{Y,Z}$) e le marginali singole (p_X, p_Y e p_Z).

b) Scrivere, in termini della densità congiunta $p_{X,Y,Z}(x, y, z)$, la probabilità che vinca un giocatore (Tizio, oppure Caio). Calcolare poi esplicitamente tale probabilità.

c) Dire se gli eventi {vince Tizio} e {vince Caio} sono indipendenti.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.]

Esercizio 6. Un'urna, che indicheremo con U, contiene 2 palline bianche e 1 pallina rossa. Da U vengono effettuate n estrazioni con reinserimento. Sia N il numero totale di palline bianche estratte. Una seconda urna, urna V, viene riempita con N palline bianche e $n - N$ palline rosse.

(a) Calcolare la distribuzione di N.

(b) Dall'urna V viene estratta una pallina: calcolare la probabilità che sia bianca (si interpreti il risultato!).

(c) Calcolare per quali valori di n la probabilità di aver estratto dall'urna U una sola pallina bianca, noto il risultato di cui al punto precedente, sia più grande di 1/2.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = np$.]

Esercizio 7. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x \text{ e } x, y = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Verificare che effettivamente p_{XY} è una densità discreta su $\mathbb{R}^2$.

b) Si ha: $\mathbb{P}(Y < X) = 0$. Giustificare questa affermazione senza fare conti (niente foglio e penna!), guardando solo alla densità congiunta.

c) Scrivere le distribuzioni marginali. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note? X e Y sono indipendenti?

d) Scrivere le distribuzioni condizionali di X dato $Y = y$ e di Y dato $X = x$, per y e x in un insieme da specificare. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note?

Esercizio 8. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)!} e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \ldots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(|Y| = X)$.

b) Scrivere le distribuzioni marginali. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note?

Esercizio 9. Siano X e Y due v.a. discrete, a valori in $E_X = \{-1, 0, +1\}$ e $E_Y = \{-1, +1\}$ rispettivamente, con densità discreta congiunta p_{XY} descritta dalla seguente tabella:

	$X = -1$	$X = 0$	$X = +1$	
$Y = -1$	1/4	1/8	α	
$Y = +1$	1/8	1/8	1/4	

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare α e scrivere le densità discrete marginali p_X e p_Y.

(b) Scrivere le densità marginali e dire se X e Y sono indipendenti.

Esercizio 10. Siano X e Y v.a. con densità discreta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} c \cdot (1-p)^{|x|-1} p & \text{se } x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \text{ e } y = \text{sgn}(x) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ e la funzione sgn, detta "funzione segno", è definita da: $\text{sgn}(\xi) = +1$ se $\xi > 0$, $\text{sgn}(0) = 0$ e $\text{sgn}(\xi) = -1$ se $\xi < 0$.

a) Si ha: $\mathbb{P}(Y = \sqrt{2}) = 0$, $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ e $\mathbb{P}(X > 0 \mid Y = -1) = 0$. Giustificare queste affermazioni senza fare conti (niente foglio e penna!), guardando solo alla densità congiunta.

b) Mostrare che dev'essere $c = 1/2$.

c) Scrivere le densità marginali di X e di Y. Le v.a. X e Y sono indipendenti?

d) Scrivere le densità condizionali di X dato $Y = y$ e di Y dato $X = x$. Verificare formalmente che $\mathbb{P}(X > 0 \mid Y = -1) = 0$.

Soluzioni

Esercizio 1. Sia X il numero di richieste di quel dato prodotto. Per ipotesi, $X \sim \mathrm{Po}(4)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{4^k}{k!} e^{-4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Allora, il numero minimo di quantità da ordinare perché al 90% il negoziante possa soddisfare tutte le richieste è il più piccolo valore di n tale che $\mathbb{P}(X \le n) \simeq 0.9$. Ora,

$$\mathbb{P}(X \le n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} p_X(k) = F_X(n).$$

Riscriviamo la tabella nella nota all'esercizio: se $X \sim \mathrm{Po}(4)$ allora per $k = 0, 1, \dots$ si ha

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
$p_X(k)$	0.018	0.073	0.147	0.195	0.195	0.156	0.104	0.060	0.030	0.013	$\cdots$

Usando la tabella, otteniamo:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\dots$
$F_X(n)$	0.018	0.091	0.238	0.433	0.628	0.784	0.888	0.948	0.978	0.991	$\dots$

Quindi, al commerciante basterà ordinare 6 o, per stare proprio tranquillo, 7 unità di quel prodotto.

Esercizio 2. (a) Si ha $\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \le a) = 1 - F_X(a)$. Inoltre, si noti che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < x) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_n \Big\{X \le x - \frac{1}{n}\Big\}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(X \le x - \frac{1}{n}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} F_X\Big(x - \frac{1}{n}\Big) = F_X(x^-),\end{aligned}$$

quindi (b), (c), (d), (e) sono vere perché:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < X \le b) &= \mathbb{P}(X \le b) - \mathbb{P}(X \le a) = F_X(b) - F_X(a), \\ \mathbb{P}(a \le X \le b) &= \mathbb{P}(X \le b) - \mathbb{P}(X < a) = F_X(b) - F_X(a^-), \\ \mathbb{P}(a \le X < b) &= \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a) = F_X(b^-) - F_X(a^-), \\ \mathbb{P}(a < X < b) &= \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X \le a) = F_X(b^-) - F_X(a).\end{aligned}$$

Esercizio 3. Ciascuna F_i è monotona, non decrescente ed inoltre, per ogni $i \ne 7$, $\lim_{x\to-\infty} F_i(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F_i(x) = 1$. Se invece $i = 7$: $\lim_{x\to-\infty} F_7(x) = \frac{1}{8} \ne 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F_7(x) = \frac{1}{8} \ne 1$, da cui segue immediatamente che F_7 non è una funzione di distribuzione.
Ora, $i = 1, \dots 6$, perché F_i sia una funzione di ripartizione, dev'essere continua a destra, cioè $F_i(x^+) = F_i(x)$.

$i = 1, 2$: F_1 e F_2 coincidono ovunque tranne che in $x = 0$ e sono continue per $x \ne 0$. Inoltre, $F_1(0^+) = \frac{1}{2} = F_1(0)$ e $F_2(0^+) = \frac{1}{2} \ne 0 = F_2(0)$: F_1 è una funzione di distribuzione mentre F_2 non lo è.

Inoltre, poiché F_1 salta solo in $x = 0$, si ha

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \Delta F_1(0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X_1 = x) = \Delta F_1(x) = 0 \text{ per ogni } x \neq 0.$$

$i = 3, 4$: $F_3(x) = F_4(x)$ per ogni x e sono funzioni continue, quindi $F_i(x^+) = F_i(x^-) = F_i(x)$: F_3 e F_4 sono funzioni di distribuzione tali che $\mathbb{P}(X_i = x) = \Delta F_i(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$i = 5, 6$: F_5 e F_6 sono costanti a tratti, quindi continue ovunque tranne che nei punti di salto $x = -8, -1, 72$. Studiamo tali punti. Si ha

$$F_5(-8^+) = \frac{1}{2} = F_5(-8), \quad F_5(-1^+) = \frac{3}{4} = F_5(-1), \quad F_5(72^+) = 1 \neq \frac{3}{4} = F_5(72),$$

quindi F_5 non è una funzione di distribuzione perché $F_5(72^+) \neq F_5(72)$. Per quanto riguarda F_6, basta osservare che F_6 coincide con F_5 per ogni $x \neq 72$ e $F_5(72^+) = 1 = F_5(72)$, dunque F_6 è una funzione di distribuzione e

$$\mathbb{P}(X_6 = -8) = \Delta F_6(-8) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X_6 = -1) = \Delta F_6(-1) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(X_6 = 72) = \Delta F_6(72) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X_6 = x) = \Delta F_6(x) = 0 \text{ per ogni } x \neq -8, -1, 72.$$

Esercizio 4. (a) Sia Y_N che Z_N coincidono con X su $(-N, N)$; se $X \notin (-N, N)$, Y_N viene "congelata" in N o in $-N$ mentre Z_N viene "congelata" in 0. Ecco perché si usa il termine "troncamento".
Detti E_{Y_N} e E_{Z_N} rispettivamente i valori che possono assumere Y_N e Z_N, dev'essere

$$E_{Y_N} = \Big(E_X \cap (-N, N)\Big) \cup \{-N, N\} \qquad E_{Z_N} = \Big(E_X \cap (-N, N)\Big) \cup \{0\}.$$

Studiamone la distribuzione.
Sia $y \in E_{Y_N}$: se $y \neq \pm N$, allora $\{Y_N = y\} = \{X = y\}$; se invece $y = N$ allora $\{Y_N = N\} = \{X = N\} \cup \{X > N\} = \{X \geq N\}$; analogamente, se $y = -N$ si ha $\{Y_N = -N\} = \{X = -N\} \cup \{X < -N\} = \{X \leq -N\}$. Quindi,

$$p_{Y_N}(y) = \begin{cases} p_X(y) & \text{se} \quad y \in E_X \cap (-N, N), \\ \mathbb{P}(X \geq N) & \text{se} \quad y = N, \\ \mathbb{P}(X \leq -N) & \text{se} \quad y = -N. \end{cases}$$

Per quanto riguarda Z_N, sia $z \in E_{Z_N}$: se $z \neq 0$, allora $\{Z_N = z\} = \{X = z\}$; se invece $z = 0$ allora $\{Z_N = 0\} = \{X = 0\} \cup \{X \geq N\} \cup \{X \leq -N\}$. Quindi,

$$p_{Z_N}(z) = \begin{cases} p_X(z) & \text{se } z \in E_X \cap (-N, N), \ z \neq 0, \\ \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X \geq N) + \mathbb{P}(X \leq -N) & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

(b) Ovviamente sia Y_N che Z_N sono v.a. discrete, che possono assumere un numero finito di valori (anche se la cardinalità di E_X può essere numerabile), quindi la funzione di ripartizione è non decrescente, continua a destra, costante a tratti e salta nei punti che tali v.a. possono assumere, con salto pari alla probabilità che tali punti siano assunti.

Studiamo G_N:

$$\begin{aligned}
G_N(y) &= \mathbb{P}(Y_N \le y) \\
&= \mathbb{P}(Y_N \le y, X < -N) + \mathbb{P}(Y_N \le y, |X| \le N) + \mathbb{P}(Y_N \le y, X > N) \\
&= \mathbb{P}(-N \le y, X < -N) + \mathbb{P}(X \le y, |X| \le N) + \mathbb{P}(N \le y, X > N) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y < -N \\ \mathbb{P}(X \le y) & \text{se } -N \le y < N \\ 1 & \text{se } y \ge N \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi $G_N(y)$ coincide con $\mathbb{P}(X \le y) = F_X(y)$ per $y \in [-N, N)$, vale 0 quando $y < -N$ e 1 se $y \ge N$. Usando le funzioni indicatrici, possiamo scrivere

$$G_N(y) = F_X(y) \mathbb{1}_{\{y \in [-N,N)\}} + \mathbb{1}_{\{y \ge N\}}. \tag{1}$$

Per disegnare G_N, basta disegnare il grafico di F_X su $[-N, N)$, porre poi $G_N \equiv 0$ quando $y < N$ e $G_N \equiv 1$ se $y \ge N$.

Vediamo H_N:

$$\begin{aligned}
H_N(z) &= \mathbb{P}(Z_N \le z) \\
&= \mathbb{P}(Z_N \le z, X < -N) + \mathbb{P}(Z_N \le z, |X| \le N) + \mathbb{P}(Z_N \le z, X > N) \\
&= \mathbb{P}(0 \le z, X < -N) + \mathbb{P}(X \le z, |X| \le N) + \mathbb{P}(0 \le z, X > N) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad z < -N \\ \mathbb{P}(-N \le X \le z) & \text{se } -N \le z < 0 \\ \mathbb{P}(X \le z) + \mathbb{P}(X > N) & \text{se } 0 \le z < N \\ 1 & \text{se } z \ge N \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi H_N vale 0 e 1 rispettivamente su $z < -N$ e $z \ge N$; coincide con $\mathbb{P}(-N \le X \le z) = F_X(z) - F_X(-N^-)$ su $[-N, 0)$ e vale $\mathbb{P}(X \le z) + \mathbb{P}(X > N) = F_X(z) + 1 - F_X(N)$ per $z \in [0, N)$, ovvero

$$H_N(z) = \big(F_X(z) - F_X(-N^-)\big) \mathbb{1}_{\{z \in [-N,0)\}} + \big(F_X(z) + 1 - F_X(N)\big) \mathbb{1}_{\{z \in [0,N)\}} + \mathbb{1}_{\{y \ge N\}}. \tag{2}$$

Per disegnare H_N, basta disegnare il grafico di F_X su $[-N, N)$; traslare F_X di $-F_X(-N^-)$ per $z \in [-N, 0)$ e traslare F_X di $1 - F_X(N)$ per $z \in [0, N)$ (si noti che se X assume valori compresi tra $-N$ e N, queste traslazioni non ci sono); porre $H_N \equiv 0$ quando $z < N$ e $H_N \equiv 1$ se $z \ge N$.

(c) Per $N \to +\infty$, sia G_N che H_N tendono a coincidere con F_X, ovvero Y_N e Z_N si "schiacciano" su X. Infatti, fissati $y, z \in \mathbb{R}$, esiste un N_0 tale che per ogni $N \ge N_0$ si abbia $y, z \in [-N, N)$. Quindi, da (1) segue che $G_N(y) = F_X(y)$ per ogni $N \ge N_0$ e

$$\lim_{N \to +\infty} G_N(y) = \lim_{N \to +\infty} F_X(y) = F_X(y);$$

usando (2), per ogni $N \ge N_0$ si ha: se $z \ge 0$ allora $H_N(z) = F_X(z) + 1 - F_X(N)$ e

$$\lim_{N \to +\infty} H_N(z) = \lim_{N \to +\infty} \Big(F_X(z) + 1 - F_X(N)\Big) = F_X(z)$$

perché $\lim_{N \to +\infty} F_X(N) = 1$, e se $z < 0$ allora $H_N(z) = F_X(z) - F_X(N^-)$ e

$$\lim_{N \to +\infty} H_N(z) = \lim_{N \to +\infty} \Big(F_X(z) - F_X(N^-)\Big) = F_X(z)$$

perché $0 \le \limsup_{N\to+\infty} F_X(N^-) \le \lim_{N\to+\infty} F_X(N) = 0$, da cui $\lim_{N\to+\infty} F_X(N^-) = 0$.

Esercizio 5. a) I lanci possono essere assunti indipendenti, quindi

$$p_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6^3} \quad \text{se } x,y,z \in \{1,\dots,6\}$$

e $p_{X,Y,Z}(x,y,z) = 0$ altrimenti. Poi, per $x,y \in \{1,\dots,6\}$,

$$p_{X,Y}(x,y) = \sum_z p_{X,Y,Z}(x,y,z) = \sum_{z=1}^{6} \frac{1}{6^3} = \frac{1}{6^2}$$

e $p_{X,Y}(x,y) = 0$ altrimenti. Per simmetria, otteniamo immediatamente $p_{X,Z}(x,z) = p_{X,Y}(x,z)$ e $p_{Y,Z}(y,z) = p_{X,Y}(y,z)$. Infine, per $x \in \{1,\dots,6\}$,

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=1}^{6} \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6}$$

e $p_X(x) = 0$ altrimenti. E ancora per simmetria, $p_Y(y) = p_X(y)$ e $p_Z(z) = p_X(z)$.

b) Possiamo scrivere

$$\{\text{vince Caio}\} = \{X \ge Y, X > Z\} = \{(X,Y,Z) \in A\}$$

dove $A = \{(x,y,z) : x \ge y, x > z\}$. Allora,

$$\mathbb{P}(\{\text{vince Caio}\}) = \sum_{(x,y,z)\in A} p_{X,Y,Z}(x,y,z) = \sum_{x=1}^{6}\sum_{y=1}^{x}\sum_{z=1}^{x-1} p_{X,Y,Z}(x,y,z).$$

Ma $\sum_{z=1}^{x-1}(\cdot) = 0$ se $x = 1$, quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\text{vince Caio}\}) &= \sum_{x=2}^{6}\sum_{y=1}^{x}\sum_{z=1}^{x-1} \frac{1}{6^3} = \frac{1}{6^3}\sum_{x=2}^{6}\sum_{y=1}^{x}(x-1) \\
&= \frac{1}{6^3}\sum_{x=2}^{6} x(x-1) = \frac{1}{6^3}\sum_{x=2}^{6} x(x-1) \\
[\text{vd } 2^a \text{ somma} \to] &= \frac{1}{6^3}\sum_{x=1}^{6} x(x-1) = \frac{1}{6^3}\cdot\frac{6(6^2-1)}{3} = \frac{35}{108} = 0.324.
\end{aligned}$$

Per simmetria, si ottiene facilmente che $\mathbb{P}(\{\text{vince Tizio}\}) = \mathbb{P}(\{\text{vince Caio}\})$. Osserviamo che l'esercizio si poteva risolvere anche usando la formula delle probabilità totali. Infatti,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\text{vince Caio}\}) &= \mathbb{P}(X \ge Y, X > Z) \\
&= \sum_{x,y,z=1}^{6} \mathbb{P}(X \ge Y, X > Z, X = x, Y = y, Z = z) \\
&= \sum_{x,y,z=1}^{6} \mathbb{P}(x \ge y, x > z, X = x, Y = y, Z = z).
\end{aligned}$$

Ora, le affermazioni $x \geq y$ e $x > z$ sono o vere o false, cioè l'evento $\{x \geq y, x > z\}$ è o tutto Ω (sono vere) oppure $\emptyset$ (sono false). Quindi, $\mathbb{P}(x \geq y, x > z, X = x, Y = y, Z = z) = \mathbb{P}(X = x, Y = y, Z = z)$ se le affermazioni sono vere oppure $\mathbb{P}(x \geq y, x > z, X = x, Y = y, Z = z) = 0$ nel caso siano false. Dunque, le "facciamo diventare vere" aggiustando i termini della sommatoria: dev'essere $x \geq y$ e $x > z$, quindi rimane

$$\mathbb{P}(\{\text{vince Caio}\}) = \sum_{x=2}^{6} \sum_{y=1}^{x} \sum_{z=1}^{x-1} p_{X,Y,Z}(x, y, z)$$

e riotteniamo la somma già vista.

c) Osserviamo che

$$C \bigcap T \equiv \{\text{vince Caio}\} \bigcap \{\text{vince Tizio}\} = \{X = Y > Z\}$$

e dunque,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C \bigcap T) = \mathbb{P}(X = Y > Z) &= \sum_{x=2}^{6} \sum_{y=x} \sum_{z=1}^{x-1} p_{X,Y,Z}(x, y, z) \\
&= \sum_{x=2}^{6} \sum_{z=1}^{x-1} p_{X,Y,Z}(x, x, z) = \sum_{x=2}^{6} \sum_{z=1}^{x-1} \frac{1}{6^3} \\
&= \frac{1}{6^3} \sum_{x=2}^{6} (x - 1) = \frac{1}{6^3} \sum_{n=1}^{5} n = \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} \\
&= \frac{5}{72} = 0.07 \neq \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(T)
\end{aligned}$$

e quindi $\{\text{vince Caio}\}$ e $\{\text{vince Tizio}\}$ non sono indipendenti.

Esercizio 6. a) Ovviamente, N è il numero di successi su n prove, dove qui "successo" significa che ad una generica estrazione è uscita una pallina bianca. Quindi,

$$p = \mathbb{P}(\text{ successo}) = \frac{2}{3}$$

e $N \sim \text{Bi}(n, p)$, dunque

$$p_N(k) = \mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

e ovviamente $p_N(k) = 0$ altrimenti.

b) Consideriamo ora l'urna V, contenente un numero N (aleatorio) di palline bianche e $n - N$ palline palline rosse. Se $B = \{\text{dall'urna } V \text{ si estrae una pallina bianca}\}$, si chiede $\mathbb{P}(B)$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B \mid N = k)\, \mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \frac{1}{n}\, np = p.$$

Dunque, se non si conosce qual è la composizione della nuova urna V, la probabilità di estrarre una pallina bianca è la stessa che si ha quando l'estrazione è fatta dalla (vecchia!) urna U.

c) Si chiede per quali valori di n si ha che $\mathbb{P}(N=1\,|\,B)>1/2$. Intanto, si ha:

$$\mathbb{P}(N=1\,|\,B)=\frac{\mathbb{P}(B\,|\,N=1)\,\mathbb{P}(N=1)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\frac{1}{n}\,np(1-p)^{n-1}}{p}=(1-p)^{n-1}.$$

Quindi n va scelto in modo tale che $(1-p)^{n-1}>1/2$: passando al logaritmo, si ottiene facilmente (ricordando che $1-p=1/3$)

$$n-1<-\frac{\log 2}{\log(1-p)}=\frac{\log 2}{\log 3}$$

da cui si ottiene $n=0$ oppure $n=1$.

Esercizio 7. a) Dev'essere $p_{XY}(x,y)\geq 0$, ed è vero, e $\sum_{x,y}p_{XY}(x,y)=1$. Vediamo perché:

$$\begin{aligned}\sum_{x,y}p_{XY}(x,y)&=\sum_{x,y\geq 0,y\geq x}\frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!}=e^{-2}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=x}^{\infty}\frac{1}{x!\,(y-x)!}\\&=e^{-2}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}\sum_{y=x}^{\infty}\frac{1}{(y-x)!}=e^{-2}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\\&=e^{-2}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}\cdot e=e^{-2}\cdot e\cdot e=1.\end{aligned}$$

b) Nella funzione di densità compare il vincolo "$y\geq x$", quindi la densità è nulla per $y<x$. Dunque, necessariamente $\{Y<X\}$ ha probabilità nulla.

c) Per $x=0,1,\ldots$, si ha

$$\begin{aligned}p_X(x)&=\sum_y p_{XY}(x,y)=\sum_{y=x}^{\infty}\frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!}=\frac{e^{-2}}{x!}\sum_{y=x}^{\infty}\frac{1}{(y-x)!}\\&=\frac{e^{-2}}{x!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{e^{-2}}{x!}e=\frac{e^{-1}}{x!}\end{aligned}$$

e quindi $X\sim\mathrm{Po}(1)$. Poi, per $y=0,1,\ldots$

$$\begin{aligned}p_Y(x)&=\sum_x p_{XY}(x,y)=\sum_{x=0}^{y}\frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!}=\frac{e^{-2}}{y!}\sum_{x=0}^{y}\frac{y!}{x!\,(y-x)!}\\&=\frac{e^{-2}}{y!}\sum_{x=0}^{y}\binom{y}{x}=\frac{e^{-2}}{y!}\cdot 2^y,\end{aligned}$$

da cui segue che $Y\sim\mathrm{Po}(2)$.
Infine, X e Y non sono indipendenti: ad esempio, $p_{XY}(1,0)=0\neq p_X(1)p_Y(0)$.

d) Fissato $y\in\{0,1,\ldots\}$, si ha

$$p_{X|Y}(x\mid y)=\frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}.$$

Quindi, per $x=0,1,\ldots,y$ otteniamo

$$p_{X|Y}(x\mid y)=\frac{\frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!}}{\frac{2^y}{y!}\,e^{-2}}=\binom{y}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{y-x},$$

il che dà una legge $\mathrm{Bi}(y, \frac{1}{2})$. Vediamo ora l'altra legge condizionale: fissato $x \in \{0, 1, \dots\}$, si ha

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)}.$$

Quindi, per $y = x, x+1, \dots$ otteniamo

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \frac{\frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!}}{\frac{1}{x!}\,e^{-1}} = \frac{1}{(y-x)!}\,e^{-1}.$$

Notiamo che $\xi \mapsto p_{Y|X}(x + \xi \mid x)$ dà la densità della legge $\mathrm{Po}(1)$, dunque il comportamento condizionale di Y noto che $X = x$ è del tipo $x + Z$, con $Z \sim \mathrm{Po}(1)$.

Esercizio 8. a) Si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Y| = X) &= \sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y| = X, X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y| = x, X = x) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \in \{x, -x\}, X = x) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \big(\mathbb{P}(Y = x, X = x) + \mathbb{P}(Y = -x, X = x)\big) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \big(p_{XY}(x, x) + p_{XY}(x, -x)\big) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{2}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} = \frac{2}{3}\,e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{2}{3}\,e^{-1}\,e = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

b) Studiamo la marginale di X. Per $x = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \sum_y p_{XY}(x, y) = \sum_{y \in \{-x, 0, x\}} p_{XY}(x, y) = \sum_{y \in \{-x, 0, x\}} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} \times 3 = \frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1}.
\end{aligned}$$

Notiamo che $\xi \mapsto p_X(\xi + 1)$ dà la legge $\mathrm{Po}(1)$, quindi la legge di X è uguale alla legge di $1 + Z$, con $Z \sim \mathrm{Po}(1)$. Per Y, abbiamo

$$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x, y).$$

Il vincolo chiede $y \in \{-x, 0, x\}$. Essendo però $x \geq 1$, proseguiamo lo studio per $y \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Ora, se $y = 0$ si ha

$$\begin{aligned}
p_Y(0) &= \sum_{x \geq 1} p_{XY}(x, 0) = \sum_{x \geq 1} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} \\
&= \frac{1}{3}\,e^{-1} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \frac{1}{3}\,e^{-1}\,e = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Se invece $y > 0$, $p_{XY}(x,y) \neq 0$ solo per $x = y$, quindi

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \{y\}} p_{XY}(x,y) = p_{XY}(y,y) = \frac{1}{3} \frac{1}{(y-1)!} e^{-1}.$$

Infine, per $y < 0$, $p_{XY}(x,y) \neq 0$ solo per $x = -y$, quindi

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \{-y\}} p_{XY}(x,y) = p_{XY}(-y,y) = \frac{1}{3} \frac{1}{(-y-1)!} e^{-1}.$$

Riassumendo, otteniamo:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } y = 0 \\ \frac{1}{3} \frac{1}{(|y|-1)!} e^{-1} & \text{se } y = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

C'è una qualche similitudine con la legge di Poisson (si potrebbe dire di più ma non abbiamo ancora gli strumenti per farlo).

Esercizio 9. a) Dev'essere $\alpha = p_{XY}(1,-1) \geq 0$ e $\sum_{x,y} p_{XY}(x,y) = 1$, quindi:

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \alpha + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \alpha + \frac{7}{8}$$

da cui segue che $\alpha = \frac{1}{8}$, dunque la tabella diventa:

	$X = -1$	$X = 0$	$X = +1$	
$Y = -1$	1/4	1/8	1/8	
$Y = +1$	1/8	1/8	1/4	

b) Le densità marginali si possono calcolare facilmente in tabella: per p_X basta sommare sulle colonne e per p_Y sulle righe. Si ottiene quindi

$X = -1$	$X = 0$	$X = +1$
3/8	1/4	3/8

e

$Y = -1$	1/2
$Y = +1$	1/2

Infine, X e Y non sono indipendenti: ad esempio, $p_{XY}(-1,-1) = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = p_X(-1) p_Y(-1)$.

Esercizio 10. a) La funzione segno sgn assume i valori $-1, 0, 1$, quindi Y può assumere solo questi valori, da cui segue che $\mathbb{P}(Y = \sqrt{2}) = 0$. Inoltre, la densità congiunta è non nulla per $x = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ed in corrisponsenza di questi valori Y può assumere il segno, cioè Y può "vivere" solo su $\{\pm 1\}$, e quindi $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$. Infine, se $y = -1$, si ha $p_{XY}(x,y) = 0$ quando $x > 0$. Ma allora, se si osserva che $Y = -1$, X non può di certo assumere valori positivi, e quindi $\mathbb{P}(X > 0 \mid Y = -1) = 0$.

b) Ovviamente $c > 0$. E poi

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{x,y} p_{XY}(x,y) = \sum_{x \geq 1} \sum_{y} p_{XY}(x,y) + \sum_{x \geq 1} \sum_{y} p_{XY}(-x,y) \\ &= \sum_{x \geq 1} p_{XY}(x,+1) + \sum_{x \geq 1} p_{XY}(-x,-1) = 2c \sum_{n \geq 1} (1-p)^{n-1} p = 2c \end{aligned}$$

da cui segue che $c = 1/2$.
c) Fissato $x \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots\}$, si ha

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x, y) = p_{XY}(x, +1) + p_{XY}(x, -1).$$

Ma, se $x > 0$ si ha $p_{XY}(x, -1) = 0$ e se $x < 0$ si ha $p_{XY}(x, +1) = 0$. In ogni caso, rimane

$$p_X(x) = \frac{1}{2}\,(1-p)^{|x|-1}p$$

ed ovviamente $p_X(x) = 0$ per $x \notin \{\pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Poi,

$$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x, y) = \sum x \geq 1 p_{XY}(x, y) + \sum_{x \geq 1} p_{XY}(-x, y).$$

Ora, se $y = +1$ la seconda somma è fatta di termini tutti nulli, mentre se $y = -1$ è la prima somma ad essere nulla. Dunque, per $y \in \{\pm 1\}$ si ottiene

$$p_Y(y) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (1-p)^{n-1} p = \frac{1}{2},$$

cioè Y è uniformemente distribuita in $\{-1, +1\}$.
d) Studiamo la legge di X dato Y. Fissato $y \in \{\pm 1\}$,

$$p_{X|Y}(x \mid y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}.$$

Il numeratore assume valori diversi a seconda che y sia positivo o negativo. Diviadiamo quindi in due casi.
Caso 1: $y = +1$. Allora $p_{XY}(x, +1) = 0$ se $x < 0$, e rimane:

$$p_{X|Y}(x \mid +1) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{se } x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Caso 2: $y = -1$. Qui $p_{XY}(x, -1) = 0$ se $x > 0$, e rimane:

$$p_{X|Y}(x \mid -1) = \begin{cases} (1-p)^{-x-1}p & \text{se } x = -1, -2, -3, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo $p_{X|Y}(x \mid -1) = 0$ per $x \neq -1, -2, \ldots$, si ha

$$\mathbb{P}(X > 0 \mid Y = -1) = \sum_{x\,:\,x>0} p_{X|Y}(x \mid -1) = 0.$$

Vediamo ora l'altra densità condizionale. Fissiamo quindi $x \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Allora,

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)}.$$

Ma $p_{XY}(x, y) \neq 0$ se e solo se $y = \mathrm{sgn}(x)$, quindi:
- se $x > 0$ allora $p_{Y|X}(+1 \mid x) = 1$ e $p_{Y|X}(-1 \mid x) = 0$;
- se $x < 0$ allora $p_{Y|X}(+1 \mid x) = 0$ e $p_{Y|X}(-1 \mid x) = 1$.
In altre parole, noto che $X = x$ allora Y vale 1 se $x > 0$ ed invece Y vale -1 se $x < 0$.