Tutorato II
Probabilità e Statistica
a.a. 2015/2016

Argomenti: uso del calcolo combinatorio; v.a. discrete; leggi legate agli schemi successo-insuccesso: bernoulliana, binomiale, ipergeometrica e geometrica.

Esercizio 1. In un mazzo di n chiavi, una sola chiave apre una certa porta. Per aprire la porta, si prova una chiave alla volta e se non è quella giusta,

a) la si elimina dal mazzo;

b) la si reinserisce nel mazzo (si immagini, in questo caso, di rimescolare tutte le chiavi).

Calcolare la probabilità di aprire la porta al $k-$esimo tentativo nei due casi **a)** e **b)**. Qual è la probabilità che occorrano almeno j tentativi prima di aprire la porta? Siamo sicuri che nel caso **b)** la porta prima o poi si aprirà?

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che, per ogni $\alpha \in (-1,1)$ e $\ell \in \mathbb{N}$, si ha $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \sum_{i=\ell}^{\infty} \alpha^{i-\ell} = \frac{1}{1-\alpha}$.]

Esercizio 2. Un'urna contiene 90 palline numerate da 1 a 90, che vengono estratte una dopo l'altra senza rimpiazzo.

a) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero più piccolo ($\leq$) di 60?

b) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero dispari?

Esercizio 3. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e X una v.a. discreta a valori in E. Sia $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$, l'insieme delle parti di E. Definiamo la "legge di X" come

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{E} \to [0,1], \qquad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \quad A \in \mathcal{E}.$$

Dimostrare che $\mathbb{P}_X$ è una probabilità su $(E, \mathcal{E})$.

Esercizio 4. Ugo, Ciro, Alessandro e Massimiliano sono candidati per formare l'equipaggio di una navetta spaziale, che deve essere composto da due persone. L'equipaggio verrà deciso per estrazione a sorte.

a) Qual è la probabilità che Ugo faccia parte dell'equipaggio?

b) Qual è la probabilità che i prescelti siano Ugo e Ciro?

Esercizio 5. Una fabbrica produce monete, provenienti da due linee di produzione diverse A e B. Le monete sono per lo più eque, tranne il 10% di quelle prodotte dalla linea A, che danno a testa una probabilità di uscita pari a 1/8, ed il 20% delle monete che escono da B, che danno testa con probabilità 1/4.

a) Qual è la probabilità che una moneta scelta a caso sia difettosa?

b) Qual è la probabilità che una moneta scelta a caso dia testa?

c) Le monete vengono preparate in confezioni da 10 pezzi, tutte provenienti dalla stessa linea. Si osserva che una sola moneta di una confezione scelta a caso è difettosa. È più probabile che si tratti di una confezione contenente monete provenienti dalla linea A o dalla linea B?

Esercizio 6. Si sa che in una schedina del totocalcio i tre simboli 1, X, 2 compaiono con probabilità 0.46, 0.28 e 0.26 rispettivamente. Supponiamo inoltre che una colonna del totocalcio riguardi 13 partite, com'era fino a poco tempo fa. Calcolare la probabilità che nella schedina di domenica

a) il 2 compaia più ($\geq$) di 4 volte;

b) il simbolo X non compaia mai;

c) il 2 e lo X insieme compaiano più ($\geq$) di 12 volte.

Esercizio 7. Una scatola contiene 10 monete: 8 di queste sono equilibrate, mentre le altre 2 danno testa con probabilità 2/3. Una moneta viene scelta a caso e lanciata tre volte.

a) Qual è la probabilità che si abbiano tre teste? E due teste e una croce?

b) Sapendo che sono uscite tre teste, è più probabile che la moneta scelta sia equilibrata oppure no?

c) Sempre sapendo che sono uscite tre teste, qual è la probabilità che anche un quarto lancio (della stessa moneta) dia testa?

d) Indichiamo con X_1 il risultato del primo lancio e con X_2 il risultato del secondo. Quanto vale $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$? Gli eventi $\{X_1 = 1\}$ e $\{X_2 = 1\}$ sono indipendenti?

Esercizio 8. Due urne, A e B, contengono 100 monete. In particolare: A contiene 10 monete difettose e 90 eque; B contiene 20 monete difettose e 80 eque. 10 monete vengono estratte senza reinserimento da una delle due urne. Qual è la probabilità che ve ne sia almeno una difettosa sapendo che:

(a) l'urna scelta è la A;

(b) l'urna scelta è la B;

(c) l'urna è scelta a caso tra A e B.

Esercizio 9. Una stampante è collegata ad una rete che permette l'accesso ad un massimo di 20 richieste di stampa. A questa rete sono collegati 24 operatori, ognuno dei quali, in un certo istante, invia una stampa con probabilità 3/5. Con quale probabilità la stampante è, in un dato istante, satura (cioè, non è in grado di soddisfare tutte le richieste di stampa inviate)?

Esercizio 10. Al Luna Park, Luca e Sara si sfidano al tiro a segno, tirando una volta per ciascuno. Vince chi per primo colpisce il bersaglio. È noto che Sara colpisce il bersaglio con probabilità 1/2 e sia α, con $0 < \alpha < 1$, la probabilità con la quale Luca tira a segno. Determinare, qualora esista, il valore di α che rende equiprobabile la vittoria di Luca e Sara quando

(a) Luca comincia il gioco;

(b) Sara comincia il gioco;

(c) il primo giocatore viene scelto per sorteggio casuale.

Esercizio 11. Fissati $\rho \in (0,1)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, siano

$$p_1(x) = \begin{cases} c_1 \rho^{2x} & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e} \quad p_2(x) = \begin{cases} c_2 \rho^{2x} & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire se è possibile scegliere c_1 e c_2 affinché p_1 e p_2 siano due densità discrete. E in caso affermativo, si tratta di leggi note?

Esercizio 12. Fissati n intero, $n \geq 1$, e $c \in \mathbb{R}$, sia

$$p(x) = \begin{cases} c\,x & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire se è possibile scegliere c affinché p sia una densità discrete.
[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.]

Esercizio 13. Come l'Esercizio 12 con

$$p(x) = \begin{cases} c\,x\rho^x & x = 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\rho \in (0,1)$ è fissato.
[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{k=0}^{n} \rho^k = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$.]

Esercizio 14. Come l'Esercizio 12 con

$$p(x) = \begin{cases} c\,x\rho^x & x = -1, 0, +1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\rho \in (0,1)$ è fissato.

Soluzioni

Esercizio 1. a) In questo caso, si può prendere come punto di vista la posizione nel mazzo della chiave che apre la porta. I casi possibili sono pari al numero delle combinazioni di 1 elemento (= chiave giusta) su n posti (= numero totale delle chiavi): $\binom{n}{1} = n$. Se A_k denota l'evento *la porta si apre al $k-$esimo tentativo*, allora per A_k c'è una sola possibile scelta: la chiave si deve trovare al $k-$esimo posto. Quindi

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}.$$

Come verifica, dev'essere $1 = \mathbb{P}(\{\textit{aprire la porta}\}) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k)$: mettendo man man da parte le chiavi che non aprono, la chiave funzionante si troverà senz'altro e occorreranno al più n tentativi per aprire la porta. Infatti, tenendo presente che gli A_k sono disgiunti, si ha

$$\mathbb{P}(\{\textit{aprire la porta}\}) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Se $B_j = \{\textit{occorrono almeno } j \textit{ tentativi per aprire la porta}\}$, allora $B_j = \cup_{k=j}^n A_k$ se $j \leq n$ e $B_j = \emptyset$ se $j > n$, quindi

$$\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(\cup_{k=j}^n A_k) = \sum_{k=j}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=j}^n \frac{1}{n} = \frac{n-j+1}{n}$$

se $1 \leq j \leq n$ e ovviamente $\mathbb{P}(B_j) = 0$ se $j > n$.

b) In questo caso, fissato il numero di tentativi k, il punto di vista può essere il numero di chiavi da testare. Ogni volta che si cerca di aprire la porta, ci sono n possibili chiavi da provare e poiché il numero totale dei tentativi è k, si hanno n^k possibili prove (= disposizioni con ripetizione). Perché la chiave giusta si trovi esattamente al $k-$esimo tentativo, significa che ci sono $n-1$ chiavi da provare per ogni tentativo precedente a k ed una sola all'ultimo tentativo, quindi $(n-1)^{k-1}$. Allora,

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}.$$

Osserviamo che qui, a priori, il numero k di tentativi necessari per aprire la porta è qualsiasi: $k \geq 1$. E si ha

$$\mathbb{P}(\textit{aprire la porta}) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^\infty A_k) = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1-\frac{n-1}{n}} = 1,$$

il che prova che con certezza la porta si aprirà, prima o poi. Infine, fissato $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_j) = &\ \mathbb{P}(\cup_{k=j}^\infty A_k) = \sum_{k=j}^\infty \mathbb{P}(A_k)\\ = &\ \frac{(n-1)^{j-1}}{n^j}\sum_{k=j}^\infty \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-j} = n\,\frac{(n-1)^{j-1}}{n^j} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1}.\end{aligned}$$

Esercizio 2. a) Si tratta di calcolare la probabilità di scegliere a caso in dieci estrazioni senza rimpiazzo 10 elementi da un gruppo di 60 e 0 dal gruppo delle rimanenti 30. Le formule della legge ipergeometrica danno

$$p = \frac{\binom{60}{10}\binom{30}{0}}{\binom{90}{10}} = \frac{60 \times \cdots \times 51}{90 \times \cdots \times 81} = 0.013.$$

b) Argomento identico al precedente: calcolo della probabilità di scegliere a caso in dieci estrazioni senza rimpiazzo 10 elementi da un gruppo di 45 (i numeri dispari) e 0 dal gruppo delle rimanenti 45. Sempre la legge ipergeometrica dà

$$p = \frac{\binom{45}{10}\binom{45}{0}}{\binom{90}{10}} = \frac{45 \times \cdots \times 36}{90 \times \cdots \times 81} = 5.6 \cdot 10^{-4}.$$

Esercizio 3. Si ha $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) \in [0,1]$ per ogni $A \subset E$ e $\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X \in E) = 1$. Verifichiamo la σ-additività. Siano $A_1, A_2, \ldots$ in $\mathcal{E}$ tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Allora

$$\{X \in \cup_n A_n\} = X^{-1}(\cup_n A_n) = \cup_n X^{-1}(A_n) = \cup_n \{X \in A_n\}.$$

Inoltre, se $i \neq j$, $\{X \in A_i\} \cap \{X \in A_j\} = \{X \in A_i \cap A_j\} = \{X \in \emptyset\} = \emptyset$, quindi $\{X \in A_1\}, \{X \in A_2\}, \ldots$ sono elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti. Allora, usando la σ-additività di $\mathbb{P}$, otteniamo

$$\mathbb{P}_X(\cup_n A_n) = \mathbb{P}(X \in \cup_n A_n) = \mathbb{P}(\cup_n \{X \in A_n\}) = \sum_n \mathbb{P}(\{X \in A_n\}) = \sum_n \mathbb{P}_X(A_n),$$

da cui $\mathbb{P}_X$ è σ-additiva. Dunque, $\mathbb{P}_X$ è una probabilità su $(E, \mathcal{E})$.

Esercizio 4. a) Si può usare la legge ipergeometrica (probabilità di scegliere, in due estrazioni, un elemento dall'insieme {Ugo} e uno dal gruppo {Ciro,Alessandro, Massimiliano}. Si ottiene

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}$$

b) Si può usare la legge ipergeometrica (probabilità di scegliere, in due estrazioni, 2 elementi dall'insieme {Ugo, Ciro} e 0 dal gruppo {Alessandro, Massimiliano}. Si ottiene

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Esercizio 5. a) Indichiamo: $D = \{$la moneta scelta è difettosa$\}$, $A = \{$la moneta scelta proviene dalla linea A$\}$, $B = \{$la moneta scelta proviene dalla linea B$\}$.

Si chiede $\mathbb{P}(D)$: usando la formula di Bayes,

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D \mid B)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{10}\frac{1}{2} + \frac{2}{10}\frac{1}{2} = \frac{3}{20}.$$

b) Sia $T = \{$tirando la moneta scelta, esce testa$\}$. Si chiede $\mathbb{P}(T)$. Useremo la formula di Bayes a partire dalla partizione $D^c = \{$la moneta scelta non è difettosa$\}$, $D \cap A$ e $D \cap B$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T) =& \mathbb{P}(T \mid D^c)\mathbb{P}(D^c) + \mathbb{P}(T \mid D \cap A)\mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(T \mid D \cap B)\mathbb{P}(D \cap B)\\ =& \mathbb{P}(T \mid D^c)\mathbb{P}(D^c) + \mathbb{P}(T \mid D \cap A)\mathbb{P}(D \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T \mid D \cap B)\mathbb{P}(D \mid B)\mathbb{P}(B)\\ =& \frac{1}{2}\frac{17}{20} + \frac{1}{8}\frac{1}{10}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{2}{10}\frac{1}{2} = 0.45625\end{aligned}$$

c) Sia X = numero di monete difettose in una confezione. Si chiede $\mathbb{P}(A \mid X = 1)$ e $\mathbb{P}(B \mid X = 1)$. Si ha

$$\mathbb{P}(A \mid X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(X = 1)} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(B \mid X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(X = 1)}.$$

Essendo $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0.5$, basta confrontare $\mathbb{P}(X = 1 \mid A)$ e $\mathbb{P}(X = 1 \mid B)$ (sono più facili da calcolare!). Cominciamo dalla prima.
Se denotiamo con X_A il numero di monete difettose osservate scegliendo 10 monete a caso dalla linea A, allora $\mathbb{P}(X = 1 \mid A) = \mathbb{P}(X_A = 1)$. Ora, se pensiamo "successo"="una moneta presa a caso è difettosa", è immediato che $X_A \sim \mathrm{B}(10, p_A)$, dove $p_A = \mathbb{P}(D \mid A) = 1/8$. Dunque,

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid A) = \mathbb{P}(X_A = 1) = \binom{10}{1} p_A(1 - p_A)^9 = 10 \cdot \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^9 = 0.387.$$

Ripetendo il ragionamento per B, otteniamo analogamente

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid B) = 10 \cdot \frac{20}{100}\left(\frac{80}{100}\right)^9 = 0.268.$$

Dunque, è più probabile che la confezione sia fatta di monete provenienti dalla linea A.

Esercizio 6. a) Se supponiamo che i risultati delle singole partite siano indipendenti, il numero, Y, di 2 che compare in una colonna vincente seguirà una legge binomiale $\mathrm{Bi}(13, 0.26)$. La probabilità richiesta è dunque

$$P(Y \geq 4) = \sum_{k=4}^{13} \binom{13}{k} 0.26^k 0.74^{13-k}.$$

Per fare il calcolo, conviene calcolare $\mathbb{P}(Y < 4) = \mathbb{P}(Y \leq 3)$, cioè

$$\binom{13}{0}0.74^{13} + \binom{13}{1}0.26 \cdot 0.74^{12} + \binom{13}{2}0.26^2 \cdot 0.74^{11} + \binom{13}{3}0.26^3 \cdot 0.74^{10} = 0.55.$$

Dunque, $\mathbb{P}(Y \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(Y < 4) = 0.45$.
b) Il numero, Z, di X che compaiono nella schedina segue una legge $\mathrm{Bi}(13, 0.28)$. Dunque la probabilità che il simbolo X non compaia mai

$$\mathbb{P}(Z = 0) = (1 - 0.28)^{13} = 0.014 = 1.4\%.$$

c) La probabilità che appaia o il 2 o lo X è $0.26 + 0.28 = 0.54$. Dunque, il numero di apparizioni del 2 o dello X insieme segue una legge $\mathrm{Bi}(13, 0.54)$. Dunque la probabilità che essi insieme appaiano più di 12 volte è

$$\binom{13}{12} 0.54^{12} \cdot 0.46 + \binom{13}{13} 0.54^{13} = 0.004 = 0.4\%.$$

Esercizio 7. a) Se E denota l'evento "la moneta scelta è equilibrata", allora condizionatamente a E o a E^c il numero di teste osservate su n lanci ha una legge $\mathrm{Bi}(n, p)$, con $p = 1/2$ se si osserva E e $p = 2/3$ se si osserva E^c. Indicando con S_3 il numero di teste (=successo) osservate su 3 lanci, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_3 = 3) &= \mathbb{P}(S_3 = 3 \mid E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(S_3 = 3 \mid E^c)\mathbb{P}(E^c) \\ &= \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{8}{10} + \binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{10} = \frac{43}{270} = 0.16.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_3 = 2) &= \mathbb{P}(S_3 = 2 \mid E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(S_3 = 2 \mid E^c)\mathbb{P}(E^c) \\ &= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} + \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10} = \frac{35}{90} = 0.39.\end{aligned}$$

b) Usando la formula di Bayes, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \mid S_3 = 3) &= \frac{P(S_3 = 3 \mid E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(S_3 = 3)} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{8}{10}}{\frac{43}{270}} = \frac{27}{43} = 0.63 \\ \mathbb{P}(E^c \mid S_3 = 3) &= 1 - \mathbb{P}(E \mid S_3 = 3) = \frac{16}{43} = 0.27,\end{aligned}$$

quindi è più probabile che si tratti di una moneta equilibrata.

c) Indichiamo con X_4 il risultato del quarto lancio: 1 se esce testa (=successo) e 0 se esce croce. Indichiamo con S_4 il numero di teste (=successi) su 4 lanci. Allora,

$$\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid S_3 = 3) = \frac{\mathbb{P}(\{X_4 = 1\} \cap \{S_3 = 3\})}{\mathbb{P}(S_3 = 3)} = \frac{\mathbb{P}(S_4 = 4)}{\mathbb{P}(S_3 = 3)}.$$

Ma,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_4 = 4) &= \mathbb{P}(S_4 = 4 \mid E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(S_4 = 4 \mid E^c)\mathbb{P}(E^c) \\ &= \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{8}{10} + \binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{10} = \frac{145}{1620} = 0.09,\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid S_3 = 3) = \frac{0.09}{0.16} = 0.56.$$

d) Si ha

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}(\{X_2 = 1\} \cap \{X_1 = 1\})}{\mathbb{P}(X_1 = 1)} = \frac{\mathbb{P}(S_2 = 2)}{\mathbb{P}(S_1 = 1)}$$

Ma,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1 = 1) &= \mathbb{P}(S_1 = 1 \mid E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(S_1 = 1 \mid E^c)\mathbb{P}(E^c) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{10} = \frac{8}{15} = 0.5334, \\
\mathbb{P}(S_2 = 2) &= \mathbb{P}(S_2 = 2 \mid E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(S_2 = 2 \mid E^c)\mathbb{P}(E^c) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{8}{10} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{10} = \frac{13}{45} = 0.29.
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{\frac{13}{45}}{\frac{8}{15}} = \frac{13}{24} = 0.5416.$$

Poiché $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1)$, si ha $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) \neq \mathbb{P}(X_2 = 1)$, dunque è chiaro che gli eventi in questione non possono essere indipendenti.

Esercizio 8. Se "successo"="la moneta è difettosa", si tratta di uno schema successo-insuccesso che si può modellizzare con la distribuzione ipergeometrica (le prove non sono indipendenti!).

Poniamo $A = \{$si sceglie l'urna A$\}$, $B = \{$si sceglie l'urna B$\}$ e X la v.a. (ipergeometrica) che dà il numero di monete difettose ottenute prendendo 10 monete senza reinserimento da un'urna prefissata. Allora:

$$\mathbb{P}(X = k \,|\, A) = \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{10-k}}{\binom{100}{10}}$$

quindi si richiede

$$\mathbb{P}(X \geq 1 \,|\, A) = 1 - \mathbb{P}(X = 0 \,|\, A) = 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}} = 0.6695.$$

Nota: questo calcolo è stato fatto tramite un programma C usando il fatto che

$$\frac{\binom{10}{0}\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{90!}{80!} \cdot \frac{90!}{100!} = \prod_{k=1}^{10} \frac{80+k}{90+k}$$

e quindi

$$\mathbb{P}(X = 0 \,|\, A) = \exp\big(\ln \mathbb{P}(X = 0 \,|\, A)\big) = \exp\Big(\sum_{k=1}^{10} \ln\Big(\frac{80+k}{90+k}\Big)\Big).$$

Ad esempio,

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main ()
```

```
{
    int k;
    double x=0.;
    for (k = 1; k <= 10; k++){
     x+=log(80+k)-log(90+k);
     }
    printf("risultato = %f \n", x);
    system("pause");
}
```

(b) Analogamente ad (a), si ha:

$$\mathbb{P}(X = k \,|\, B) = \frac{\binom{20}{k}\binom{80}{10-k}}{\binom{100}{10}}$$

e si richiede

$$\mathbb{P}(X \geq 1 \,|\, B) = 1 - \mathbb{P}(X = 0 \,|\, B) = 1 - \frac{\binom{20}{0}\binom{80}{10}}{\binom{100}{10}} = 0.9049.$$

(c) Usando la formula di Bayes,

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X \geq 1 \,|\, A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X \geq 1 \,|\, B)\mathbb{P}(B) = \frac{0.6695 + 0.9049}{2} = 0.7872.$$

Esercizio 9. Immaginando che le richieste di stampa siano indipendenti, il numero di X di richieste di stampa si può vedere come una v.a. binomiale, di parametri $n = 24$ e $p = 3/5$. La stampante è satura quando $X \geq 21$, che avviene con probabilità

$$p = \mathbb{P}(X \geq 21) = \sum_{k=21}^{24} \binom{24}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{24-k} = 0.0035$$

Esercizio 10. Per $k \geq 1$, indichiamo con L_k e S_k due v.a. bernoulliane

$$L_k = \begin{cases} 1 & \text{se Luca colpisce il bersaglio al tempo } k \\ 0 & \text{se Luca non colpisce il bersaglio al tempo } k \end{cases}$$

$$S_k = \begin{cases} 1 & \text{se Sara colpisce il bersaglio al tempo } k \\ 0 & \text{se Sara non colpisce il bersaglio al tempo } k \end{cases}$$

È evidente che, per ogni k, le v.a. $L_1, \ldots, L_k, S_1, \ldots, S_k$ sono indipendenti.

(a) Se Luca tira per primo, possiamo porre

$$\mathbb{P}(S_{2k+1} = 0) = 1, \quad \mathbb{P}(S_{2k} = 1) = \frac{1}{2} = 1 - \mathbb{P}(S_{2k} = 0),$$
$$\mathbb{P}(L_{2k} = 0) = 1, \quad \mathbb{P}(L_{2k+1} = 1) = \alpha = 1 - \mathbb{P}(L_{2k+1} = 0).$$

dove k indica genericamente un indice per il quale le quantità su scritte hanno senso. Luca può vincere solo in un istante dispari; calcoliamo dunque la probabilità che vinca in un istante prefissato: fissato $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\text{Luca vince al tempo } 2k+1) = \mathbb{P}(L_1 = S_2 = \cdots = L_{2k-1} = S_{2k} = 0, L_{2k+1} = 1)$$

(con la convenzione $\{L_1 = S_2 = \cdots = L_{2k-1} = S_{2k} = 0\} = \Omega$ se $k = 0$) e usando l'indipendenza

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Luca vince al tempo } 2k+1) = & \Big(\textstyle\prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(L_{2j-1} = 0)\mathbb{P}(S_{2j} = 0)\Big)\mathbb{P}(L_{2k+1} = 1) \\ = & \frac{(1-\alpha)^k \alpha}{2^k}\end{aligned}$$

(con la convenzione $\prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(L_{2j-1} = 0)\mathbb{P}(S_{2j} = 0) = 1$ se $k = 0$). Quindi,

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca}) = \sum_k \mathbb{P}(\text{Luca vince al tempo } 2k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^k}{2^k}\,\alpha = \frac{2\alpha}{1-\alpha}.$$

Perché Luca e Sara vincano con uguale probabilità, dev'essere[1] $\mathbb{P}(\text{vince Luca}) = \frac{1}{2}$ da cui segue che $\alpha = \frac{1}{3}$.

(b) Se è Sara ad iniziare, si procede come in **(a)** tenendo però conto che ora Luca può vincere in un istante pari: qui

$$\begin{gathered}\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = 1, \quad \mathbb{P}(S_{2k+1} = 1) = \frac{1}{2} = 1 - \mathbb{P}(S_{2k+1} = 0), \\ \mathbb{P}(L_{2k+1} = 0) = 1, \quad \mathbb{P}(L_{2k} = 1) = \alpha = 1 - \mathbb{P}(L_{2k} = 0).\end{gathered}$$

Allora,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{vince Luca}) &= \sum_k \mathbb{P}(\text{Luca vince al tempo } 2k) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(S_1 = L_2 = \cdots = L_{2k-2} = S_{2k-1} = 0, L_{2k} = 1) \\ &= \sum_{k\geq 1} \Big(\prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(L_{2j-1} = 0)\mathbb{P}(S_{2j} = 0)\Big)\mathbb{P}(S_{2k-1} = 0)\mathbb{P}(L_{2k} = 1) = \sum_{k\geq 1} \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{2^{k-1}} \cdot \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2} \sum_{k\geq 1} \Big(\frac{1-\alpha}{2}\Big)^{k-1} = \frac{\alpha}{1+\alpha}.\end{aligned}$$

[1] Quanto affermato è vero se $\mathbb{P}(\text{vince Luca}) + \mathbb{P}(\text{vince Sara}) = 1$, ciè se con certezza almeno uno dei due vince. Tale fatto è intuitivamente molto ragionevole, ciò nonostante andrebbe dimostrato. Vediamo come si può fare.

Per calcolare la probabilità che sia Sara a vincere, procediamo in modo del tutto analogo: per $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{vince Sara}) &= \sum_k \mathbb{P}(\text{Sara vince al tempo } 2k) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(L_1 = S_2 = \cdots = S_{2k-2} = L_{2k-1} = 0, S_{2k} = 1) \\ &= \sum_{k\geq 1} \Big(\prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(L_{2j-1} = 0)\mathbb{P}(S_{2j} = 0)\Big)\mathbb{P}(L_{2k-1} = 0)\mathbb{P}(S_{2k} = 1) = \sum_{k\geq 1} \frac{(1-\alpha)^k}{2^k} \\ &= \sum_{k\geq 0} \Big(\frac{1-\alpha}{2}\Big)^k - 1 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\end{aligned}$$

e in effetti $\mathbb{P}(\text{vince Luca}) + \mathbb{P}(\text{vince Sara}) = \frac{2\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 1$

Perché Luca e Sara vincano con uguale probabilità, dev'essere[2] $\mathbb{P}(\text{vince Luca}) = \frac{1}{2}$, il che dà $\alpha = 1$: se è Sara a tirare per prima, perché il gioco sia equo necessariamente Luca deve avere una mira ineccepibile!

(c) Se il primo a tirare viene scelto a caso, dev'essere[3]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = \mathbb{P}(\text{vince Luca}) &= \mathbb{P}(\text{vince Luca} \mid \text{Luca tira per primo})\mathbb{P}(\text{Luca tira per primo}) \\ &+\mathbb{P}(\text{vince Luca} \mid \text{Sara tira per prima})\mathbb{P}(\text{Sara tira per prima}) \\ &= \frac{2\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{2} = \frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}\end{aligned}$$

da cui segue che $\alpha = \frac{1}{2}$.

Presentiamo una soluzione alternativa alle domande **(a)** e **(b)**

(a) Definiamo[4]:

$$L = \{\text{Luca colpisce il bersaglio}\} \quad S = \{\text{Sara colpisce il bersaglio}\}$$

relativi al primo tiro disponibile per Luca e Sara (la prima *manche*). Allora, posto $p_1 = \mathbb{P}(\text{vince Luca})$, si ha:

$$\begin{aligned}p_1 &= \mathbb{P}(\text{vince Luca } |L \cap S)\mathbb{P}(L \cap S) + \mathbb{P}(\text{vince Luca } |L \cap S^c)\mathbb{P}(L \cap S^c) \\ &+\mathbb{P}(\text{vince Luca } |L^c \cap S)\mathbb{P}(L^c \cap S) + P(\text{vince Luca } |L^c \cap S^c)\mathbb{P}(L^c \cap S^c).\end{aligned}$$

Poiché, per ipotesi, sta a Luca tirare per primo, qualora dovesse colpire il bersaglio egli certamente vincerebbe:

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca } |L \cap S) = P(\text{vince Luca } |L \cap S^c) = 1.$$

Se Luca sbagliasse, la prosecuzione del gioco dipenderebbe dalla mira di Sara. Infatti, se Sara tirasse a segno, allora Luca perderebbe, il che in simboli diventa

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca } |L^c \cap S) = 0.$$

Se invece sbagliasse anche Sara, il gioco ricomincerebbe da capo, quindi

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca } |L^c \cap S^c) = p_1.$$

Dunque,

$$p_1 = \mathbb{P}(L \cap S) + \mathbb{P}(L \cap S^c) + p_1\mathbb{P}(L^c \cap S^c) = \mathbb{P}(L) + p_1\mathbb{P}(L^c \cap S^c)$$

e poiché i tiri possono supporsi indipendenti,

$$p_1 = \mathbb{P}(L) + p_1\mathbb{P}(L^c)\mathbb{P}(S^c) = \alpha + p_1\frac{1-\alpha}{2}$$

[2] Ancora una volta, occorrerebbe provare che $\mathbb{P}(\text{vince Luca}) + \mathbb{P}(\text{vince Sara}) = 1$: farlo!

[3] Anche qui andrebbe verificato che almeno uno dei due vince con certezza. Infatti, abbiamo già visto che $\mathbb{P}(\text{almeno uno dei due vince} \mid \text{Luca tira per primo}) = 1 = \mathbb{P}(\text{almeno uno dei due vince} \mid \text{Sara tira per prima})$, quindi $\mathbb{P}(\text{almeno uno dei due vince}) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

[4] Attenzione: la notazione è simile ma qui L e S sono **eventi** e non v.a.

da cui segue che p_1 è soluzione dell'equazione $p_1 = \alpha + p_1 \frac{1-\alpha}{2}$, ovvero $p_1 = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$. Perché vincano con uguale probabilità dev'essere $p_1 = \frac{1}{2}$, dunque $\alpha = \frac{1}{3}$.

(b) Detta p_2 la probabilità richiesta, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbb{P}(\text{vince Luca } | S \cap L)\mathbb{P}(S \cap L) + \mathbb{P}(\text{vince Luca } | S \cap L^c)P(S \cap L^c) \\ &+ \mathbb{P}(\text{vince Luca } | S^c \cap L)P(S^c \cap L) + P(\text{vince Luca } | S^c \cap L^c)P(S^c \cap L^c). \end{aligned}$$

Procedendo analogamente al punto **(a)** , si ha:

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca } | S \cap L) = \mathbb{P}(\text{vince Luca } | S \cap L^c) = 0, \ \mathbb{P}(\text{vince Luca } | S^c \cap L) = 1$$

e

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca } | S^c \cap L^c) = p_2$$

perché in tal caso il gioco ricomincia da capo. Quindi,

$$p_2 = \mathbb{P}(S^c \cap L) + p_2 \mathbb{P}(S^c \cap L^c) = \frac{1}{2}\alpha + p_2 \frac{1}{2}(1-\alpha)$$

cosicché p_2 è soluzione dell'equazione $p_2 = \frac{\alpha}{2} + p_2 \frac{1-\alpha}{2}$, cioè $p_2 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, cui occorre imporre la condizione $p_2 = \frac{1}{2}$, che dà $\alpha = 1$.

Esercizio 11. Ricordiamo che p è una densità discreta su E se 1) $p(x) \geq 0$ per ogni $x \in E$ e se 2) $\sum_{x \in E} p(x) = 1$. Cominciamo dalla prima.
Sicuramente $c_1 \neq 0$ altrimenti si avrebbe $p_1(x) = 0$ per ogni x. Quindi $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e perché $p_1(x) \geq 0$ su E dev'essere $c_1 > 0$. Poi,

$$1 = \sum_{x \in E} p_1(x) = \sum_{x \in E} c_1 \rho^{2x} = c_1 \sum_{n \geq 0} (\rho^2)^n = c_1 \cdot \frac{1}{1-\rho^2}$$

da cui segue che $c_1 = 1 - \rho^2$ e quindi

$$p_1(x) = \begin{cases} (1-\rho^2)(\rho^2)^x & x = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che $p \sim \text{Ge}(p)$ con $p = 1 - \rho^2$. Per la seconda, si procede analogamente: dev'essere $c_2 > 0$ e

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{x \in E} p_2(x) = \sum_{x \in E} c_2 \rho^{2x} = c_2 \sum_{n \geq 1} (\rho^2)^n = c_2 \Big(\sum_{n \geq 0} (\rho^2)^n - 1 \Big) \\ &= c_2 \Big(\frac{1}{1-\rho^2} - 1 \Big) = c_2 \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho^2}. \end{aligned}$$

Dunque, $c_2 = (1-\rho^2)/\rho^2$ e

$$p_2(x) = \begin{cases} (1-\rho^2)(\rho^2)^{x-1} & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

che è la densità della legge geometrica modificata di parametro $p = 1 - \rho^2$.

Esercizio 12. Per avere $p(x) \geq 0$ per ogni x dev'essere $c \geq 0$. $c = 0$ non va (altrimenti $p \equiv 0$) e dunque $c > 0$. Poi,

$$1 = \sum_x p(x) = c \sum_{x=0}^{n} x = c\,\frac{n(n+1)}{2}$$

e quindi $c = 2/(n(n+1))$.

Esercizio 13. Per avere $p(x) \geq 0$ per ogni x dev'essere $c \geq 0$. $c = 0$ non va (altrimenti $p \equiv 0$) e dunque $c > 0$. Poi,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_x p(x) = c \sum_{x=1}^{n} x\rho^x = c\rho \sum_{x=1}^{n} x\rho^{x-1} = c\rho \sum_{x=1}^{n} \frac{d}{d\rho}(\rho^x) \\ &= c\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{x=0}^{n} \rho^x = c\rho \frac{d}{d\rho}\Big(\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}\Big) = c\,\frac{1-(n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}}{(1-\rho)^2} \end{aligned}$$

e quindi $c = (1-\rho)^2/(1-(n+1)\rho^n + n\rho^{n+1})$. Nota: qualche dubbio sul fatto che $c > 0$???

Esercizio 14. Osserviamo che $p(-1) = -c\rho^{-1}$ e $p(+1) = c\rho$. Dunque, $p(-1) \cdot p(+1) = -c^2$, che è non negativo solo se $c = 0$. Ma allora $p \equiv 0$. Dunque, p non può essere una densità discreta, per ogni $c \in \mathbb{R}$.