Argomenti: probabilità uniforme; probabilità condizionata; formula di Bayes; formula delle probabilità totali; indipendenza.

Esercizio 1. Siano A, B, C tre eventi. Calcolare $\mathbb{P}(A \cap B^c)$ e $\mathbb{P}(A \cap (B^c \cup C))$ sapendo che $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$ e $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/9$.

[Sugg: si ricorda che $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$.]

Esercizio 2. (a) Dati gli eventi $A = \{\text{Un individuo è affetto da HIV}\}$ e $B = \{\text{Un individuo è risultato positivo al test HIV}\}$, si traducano in simboli le seguenti informazioni (ovvero, **formalizzare** le affermazioni che seguono con il linguaggio proprio del calcolo delle probabilità).

- a.1 La probabilità che un individuo sia affetto da HIV e risulti positivo al test è 0.4;
- a.2 la probabilità che un individuo malato risulti positivo al test è 0.8;
- a.3 la probabilità che un individuo sano non risulti positivo al test è 0.9;
- a.4 la probabilità che un individuo sia sano e risulti positivo al test è 0.05;
- a.5 la probabilità che un individuo che è risultato negativo al test sia effettivamente sano è $9/11$.

(b) Sfruttando le informazioni a.1–a.4, si calcoli la probabilità che:

- b.1 un individuo sia affetto da HIV oppure risulti positivo al test;
- b.2 un individuo sia sano e risulti negativo al test;
- b.3 un individuo sia malato e non risulti positivo al test;
- b.4 un individuo sia sano e non risulti positivo al test;
- b.5 un individuo affetto da HIV risulti negativo al test.

Esercizio 3. (Risolvere l'esercizio costruendo uno spazio campionario Ω ed una probabilità $\mathbb{P}$ su $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ad hoc) Due numeri vengono estratti da un'urna contenente n palline numerate da 1 a n . Calcolare la probabilità che i due numeri estratti siano consecutivi nell'ipotesi che le estrazioni vengano effettuate:

1. senza rimbussolamento (o “senza rimpiazzo”: le palline che via via sono estratte non vengono reinserite nell'urna);
2. con rimbussolamento (o “con rimpiazzo”: le palline che via via sono estratte vengono reinserite nell'urna).

Esercizio 4. (Risolvere l'esercizio costruendo uno spazio campionario Ω ed una probabilità $\mathbb{P}$ su $\mathcal{P}(\Omega)$ ad hoc) Due amici si trovano in coda ad uno sportello, insieme ad altre $n - 2$ persone.

1. Qual è la probabilità che siano separati (esattamente) da k persone?
2. Qual è la probabilità che siano separati da almeno 2 persone?

Esercizio 5. In un gioco il giocatore e il banco lanciano entrambi un dado. Il giocatore vince solo se il suo numero è strettamente più grande di quello del banco. Qual è la probabilità che il giocatore vinca?

[Sugg: si ricorda che $\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$.]

Esercizio 6. (a) Siano A, B due eventi indipendenti tali che $A, B, A \cap B$ abbiano uguale probabilità $p \in [0, 1]$. Calcolare tutti i possibili valori di p .

(b) Siano A, B, C tre eventi, a due a due indipendenti, tali che $\mathbb{P}(A) = 1/2, \mathbb{P}(B) = 1/3, \mathbb{P}(C) = 2/5$. Calcolare, qualora i dati lo consentano, $\mathbb{P}(A \cap (B^c \cup C))$ e $\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B^c \cap C))$.

(c) Siano A, B, C eventi indipendenti. Provare che anche A, B^c, C sono indipendenti.

(d) Siano A, B, C eventi indipendenti, aventi probabilità come nel punto (b). Calcolare, qualora i dati lo consentano, $\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B^c \cap C))$ e $\mathbb{P}((A \cup B^c) \cap (B^c \cup C))$.

Esercizio 7. Siano A, B, C tre eventi.

(a) Mostrare che se A, B, C sono indipendenti allora $A \cup B$ e C sono ancora eventi indipendenti.

(b) Mostrare (con un controesempio!) che non vale il viceversa (ovvero, si esibiscano 3 eventi A, B, C tali che $A \cup B$ e C sono indipendenti ma A, B, C sono dipendenti).

Esercizio 8. Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi indipendenti.

1. Dimostrare che per ogni $k \in \{2, \dots, n\}$ e per ogni $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ si ha

1.1 per ogni $1 \leq \ell \leq k - 1$,

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{i_j}\right) \cap \left(\bigcap_{j=\ell+1}^k A_{i_j}^c\right)\right) = \left(\prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}(A_{i_j})\right) \times \left(\prod_{j=\ell+1}^k \mathbb{P}(A_{i_j}^c)\right);$$

1.2 $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}^c\right) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(A_{i_j}^c)$.

2. Siano $B_1, \dots, B_n$ eventi tali che $B_1 \in \{A_1, A_1^c\}, \dots, B_n \in \{A_n, A_n^c\}$ (cioè, $B_i = A_i$ oppure $B_i = A_i^c$ per ogni $i = 1, \dots, n$). Dimostrare che per ogni $k \in \{2, \dots, n\}$ e per ogni $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ gli eventi $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$ sono indipendenti. Dedurre in particolare che gli eventi $A_1^c, \dots, A_n^c$ sono indipendenti.

Esercizio 9. 10 persone si incontrano in un viaggio organizzato che dura 16 giorni.

1. Uno dei partecipanti dice: “La probabilità che ci sia almeno uno del gruppo che festeggia il compleanno durante il viaggio è molto alta”. Cosa ne pensate?
2. Quanto dovrebbe durare il viaggio perché la probabilità che almeno uno dei 10 partecipanti festeggi il compleanno sia ≥ 0.5 ? ≥ 0.9 ?

3. Quanti dovrebbero essere i partecipanti perché durante i 16 giorni di viaggio la probabilità che almeno uno di loro festeggi il compleanno sia ≥ 0.5 ? ≥ 0.9 ?

Per risolvere l'esercizio, si considerino le seguenti ipotesi "di modello": trascuriamo gli anni bisestili, assumiamo che la probabilità di nascere in un giorno fissato dell'anno sia uniforme (il che non è del tutto vero) e che le nascite si verifichino in modo indipendente (nessun gemello, ad esempio).

Esercizio 10. Un dado viene lanciato 3 volte. Sia X_i il risultato dell' i -esimo lancio e

$$A_1 = \{X_1 = X_2\} \quad A_2 = \{X_2 = X_3\} \quad A_3 = \{X_1 = X_3\}.$$

$\mathcal{K} = \{A_1, A_2, A_3\}$ è una famiglia di eventi indipendenti?

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap (B^c \cup C)) &= \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B^c) \cap (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - (\mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}.\end{aligned}$$

Esercizio 2.

- a.1 $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4$;
- a.2 $\mathbb{P}(B|A) = 0.8$;
- a.3 $\mathbb{P}(B^c|A^c) = 0.9$;
- a.4 $\mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.05$;
- a.5 $\mathbb{P}(A^c|B^c) = 9/11$.

(b) In particolare, da a.1 e a.2 segue: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B|A) = 0.5$; da a.1 e a.4 segue: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.45$. Quindi:

- b.1 si chiede $\mathbb{P}(A \cup B)$: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.55$;
- b.2 si chiede $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$: $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.45$;
- b.3 si chiede $\mathbb{P}(A \cap B^c)$: $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$;
- b.4 si chiede $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$: $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(A \cap B^c) = 0.45$;
- b.5 si chiede $\mathbb{P}(B^c|A)$: $\mathbb{P}(B^c|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A)} = 0.2$.

Esercizio 3. I due numeri estratti possono vedersi come una coppia $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \{1, \dots, n\}^2$, con caratteristiche diverse a seconda che le estrazioni siano effettuate senza o con rimbussolamento: $\omega_1 \neq \omega_2$ nel primo caso, nessuna restrizione nel secondo (attenzione: si sta tenendo conto dell'ordine!).

Per il calcolo di $|\Omega|$, occorre distinguere nei due casi che corrispondono ai due tipi di estrazioni (si noti che tale distinzione diviene superflua per il calcolo di $|A|$!)

1. Senza rimbussolamento: $\omega_1 \neq \omega_2$, dunque

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \neq \omega_2, \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, n\}\} \text{ e } |\Omega| = n(n-1).$$

2. Con rimbussolamento:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, n\}\} \text{ e } |\Omega| = n^2.$$

Se A denota l'evento "i due numeri estratti sono consecutivi", allora, fissato il valore di ω_1 , per ω_2 sono possibili le seguenti scelte:

$$\begin{array}{ll} \text{se } \omega_1 = 1 & \text{allora } \omega_2 = 2 \\ \text{se } \omega_1 \in \{2, \dots, n-1\} & \text{allora } \omega_2 = \omega_1 \pm 1 \\ \text{se } \omega_1 = n & \text{allora } \omega_2 = n-1 \end{array}$$

Dunque, $|A| = 1 + 1 + 2(n-2) = 2(n-1)$. Ma allora,

$$\text{estrazioni senza rimbussolamento: } \mathbb{P}(A) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n};$$

$$\text{estrazioni con rimbussolamento: } \mathbb{P}(A) = \frac{2(n-1)}{n^2}.$$

Esercizio 4. Numerando le possibili posizioni in fila, i posti occupati dai due amici possono essere caratterizzati da una coppia di numeri interi compresi tra 1 e n . Quindi, una scelta possibile per Ω è:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \text{ t.c. } \omega_1 \neq \omega_2 \text{ e } \omega_i \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \{1, \dots, n\}^2 \setminus \{(i, i) : i \in \{1, \dots, n\}\} \end{aligned}$$

da cui segue che $|\Omega| = n(n-1)$.

1. Sia A_k l'evento "i due amici sono separati (esattamente) da k persone", con $1 \leq k \leq n-2$: occorre contare gli elementi di A_k . Separiamo il problema in due casi: a) $\omega_1 < \omega_2$ e b) $\omega_1 > \omega_2$. Per a), fissato ω_1 , allora necessariamente $\omega_2 = \omega_1 + k + 1$, purché $\omega_1 + k + 1 \leq n$, cioè $\omega_1 \leq n - k - 1$. Dunque, in tal caso, gli elementi di A_k che verificano a) sono $n - k - 1$. Discorso analogo per b) (questa volta va fissato ω_2 e fatto variare ω_1): gli elementi di A_k che verificano b) sono ancora $n - k - 1$. Segue allora che $|A_k| = 2(n - k - 1)$, quindi

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{2(n - k - 1)}{n(n - 1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 2.$$

2. Detto B l'evento "i due amici sono separati da almeno 2 persone", ovviamente $B = \emptyset$ se $n < 3$, altrimenti:

$$B = \cup_{k=2}^{n-2} A_k.$$

Poiché l'unione è disgiunta, si potrebbe calcolare $\mathbb{P}(B)$ sommando i valori di $\mathbb{P}(A_k)$ al variare di $k \in \{2, \dots, n-2\}$. In questo caso, però, è più semplice calcolare $\mathbb{P}(B)$ tramite la probabilità del complementare: $B^c = A_0 \cup A_1$ con $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, dunque

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_1) = 1 - \frac{2(n-1)}{n(n-1)} - \frac{2(n-2)}{n(n-1)} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}.$$

Esercizio 5. Possiamo risolvere il problema in due modi: a) costruendo lo spazio di probabilità e b) usando la formula delle probabilità totali.

a) Indicando con ω_1 il risultato del giocatore e con ω_2 il risultato del banco, possiamo porre

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, 6\}\} = \{1, \dots, 6\}^2.$$

Ovviamente, $|\Omega| = 36$. Poiniamo G l'evento "il giocatore vince". Si ha

$$G = \{\omega \in \Omega : \omega_1 > \omega_2\}.$$

Contiamo gli elementi di G : se $\omega_1 = i < 6$ allora $\omega_1 \in \{i + 1, \dots, 6\}$, dunque per ogni $i = 1, \dots, 6$ ci sono $6 - i$ possibilità. Quindi

$$|G| = \sum_{i=1}^5 (6 - i) = \sum_{k=1}^5 k = 15.$$

Ma allora

$$\mathbb{P}(G) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

b) Possiamo ragionevolmente imporre che il risultato del giocatore ed il risultato del banco siano eventi indipendenti. Poniamo A_i l'evento "il risultato del giocatore è i ". Ora, è evidente che $\mathbb{P}(G | A_1) = 0$: qualsiasi sia il risultato del banco, il giocatore, avendo fatto i , perde. Invece, $\mathbb{P}(G | A_2) = \frac{5}{6}$, perché basta che il banco faccia un risultato in $\{2, 3, \dots, 6\}$. Analogamente, $\mathbb{P}(G | A_3) = \frac{4}{6}$, $\mathbb{P}(G | A_4) = \frac{3}{6}$, $\mathbb{P}(G | A_5) = \frac{2}{6}$ e $\mathbb{P}(G | A_6) = \frac{1}{6}$. Inoltre, è evidente che $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{6}$ per ogni $i = 1, \dots, 6$.

$$\mathbb{P}(G) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(G | A_i) \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{36} \sum_{i=2}^6 (6 - i + 1) = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^5 k = \frac{1}{36} \times \frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{5}{12}.$$

Esercizio 6 (a) $p = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) = p^2$, quindi $p \in \{0, 1\}$ (ovvero: A e B sono entrambi eventi certi oppure entrambi impossibili quindi banalmente indipendenti).

(b) Si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap (B^c \cup C)) &= \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B^c) \cap (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B^c \cap C)) &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(B^c \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B^c) \cap (B^c \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(B^c) \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) \end{aligned}$$

che non sono calcolabili perché i dati del problema non permettono di valutare $\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C)$.

(c) Si ha:

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B^c)$$

e, in modo analogo, $\mathbb{P}(B^c \cap C) = \mathbb{P}(B^c) \mathbb{P}(C)$. Inoltre,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) &= \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(C)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B^c) \mathbb{P}(C). \end{aligned}$$

Quindi, A, B^c, C sono indipendenti.

(d) Si ha:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B^c \cap C)) &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(B^c \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B^c) \cap (B^c \cap C)) \\
 &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) \\
 &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{5} = \frac{7}{15}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}((A \cup B^c) \cap (B^c \cup C)) &= \mathbb{P}(B^c \cup (A \cap C)) = \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B^c \cap (A \cap C)) \\
 &= \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.
 \end{aligned}$$

Esercizio 7. (a) Poiché $(A \cap B) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, si ha

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) &= \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
 &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\
 &= \mathbb{P}(C) \left(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \right) = \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(C).
 \end{aligned}$$

(b) Ad esempio, si considerino due lanci di un dado equilibrato e si prendano

$$\begin{aligned}
 A &= \{\text{al primo lancio esce pari}\}, \\
 B &= \{\text{al primo lancio esce 2}\}, \\
 C &= \{\text{al secondo lancio esce pari}\}.
 \end{aligned}$$

Qui, $A \cup B$ e C sono indipendenti perché relativi a due lanci diversi ma A, B, C non sono indipendenti perché A e B non lo sono:

$$\mathbb{P}(A|B) = 1 \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)$$

Esercizio 8. 1.1 Supponiamo per cominciare che $\ell = k - 1$. Si ha:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_{i_j}\right) \cap A_{i_k}^c\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_{i_j}\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_{i_j}\right) \cap A_{i_k}\right) \\
 [A_1, \dots, A_n \text{ sono indep. } \rightarrow] &= \prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(A_{i_j}) - \left(\prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(A_{i_j})\right) \mathbb{P}(A_{i_k}) \\
 &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(A_{i_j})\right) (1 - \mathbb{P}(A_{i_k})) \\
 &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(A_{i_j})\right) \mathbb{P}(A_{i_k}^c)
 \end{aligned}$$

Se poi $\ell = k - 1, \dots, 1$ si procede come sopra. Analogamente si ottiene la 1.2.

2. $B_1, \dots, B_n$ sono indipendenti se e solo se per ogni $k = 2, \dots, n$ e per ogni $\{j_1, \dots, j_k\} \in \{1, \dots, n\}$ si ha $\mathbb{P}(\cap_{p=1}^k B_{j_p}) = \prod_{p=1}^k \mathbb{P}(B_{j_p})$. Ora, i k eventi $B_1, \dots, B_k$ sono del tipo già discusso nel punto 1., dunque la tesi è vera.

Esercizio 9. Formalizziamo il problema in generale: indichiamo con n la durata (in giorni) del viaggio e con k il numero dei partecipanti. Ricordiamo le ipotesi “di modello”: trascuriamo gli anni bisestili, assumiamo che la probabilità di nascere in un giorno fissato dell’anno sia uniforme (il che non è del tutto vero) e che le nascite accadano in modo indipendente (nessun gemello, ad esempio).

Per $i = 1, \dots, k$, sia A_i l’evento “lo i -esimo partecipante festeggia il compleanno in uno degli n giorni del viaggio”. Per le ipotesi fatte, si ha

$$A_1, \dots, A_k \text{ indipendenti e } \mathbb{P}(A_i) = \frac{n}{366}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Detto A l’evento “almeno uno dei partecipanti festeggia il compleanno durante il viaggio”, si ha evidentemente

$$A = \bigcup_{i=1}^k A_i.$$

Osserviamo anche che gli A_i non sono a due a due disgiunti, quindi non si può usare l’additività della probabilità. Ma, gli eventi $A_1^c, \dots, A_k^c$ rimangono indipendenti, quindi risulta facile calcolare la probabilità del complementare di A :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i^c\right) = 1 - \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i^c) = 1 - \left(1 - \frac{n}{365}\right)^k.$$

1. Qui $n = 16$ e $k = 10$, quindi

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \left(1 - \frac{16}{365}\right)^{10} = 0.36,$$

che non è trascurabile, ma nemmeno alta.

2. Qui $k = 10$. Fissata una soglia x (nel testo $x = 0.5$ o $x = 0.9$), si chiede n tale che

$$1 - \left(1 - \frac{n}{365}\right)^{10} \geq x$$

e si ottiene facilmente

$$n \geq 365 \left(1 - (1 - x)^{\frac{1}{10}}\right).$$

Sostituendo $x = 0.5$ e $x = 0.9$, si ottiene $n \geq 25$ e $n \geq 76$ rispettivamente.

3. Qui $n = 16$. Fissata una soglia x (nel testo $x = 0.5$ o $x = 0.9$), si chiede k tale che

$$1 - \left(1 - \frac{16}{365}\right)^k \geq x$$

e passando al log si ottiene facilmente

$$k \log \left(1 - \frac{16}{365}\right) \leq \log(1 - x).$$

Poiché $\log(1 - \frac{16}{365}) < 0$, si ha

$$k \geq \frac{\log(1 - x)}{\log\left(1 - \frac{16}{365}\right)}.$$

Sostituendo $x = 0.5$ e $x = 0.9$, si ottiene $k \geq 16$ e $k \geq 52$ rispettivamente.

Esercizio 10. Si ha, per $i = 1, 2, 3$,

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(2 \text{ lanci danno lo stesso risultato}) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

e, per $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$,

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(3 \text{ lanci danno lo stesso risultato}) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j),$$

sicché i tre eventi sono a due a due indipendenti. Infine,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(3 \text{ lanci danno lo stesso risultato}) = \frac{1}{36} \\ &\neq \frac{1}{6^3} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) \end{aligned}$$

dunque $\mathcal{K}$ non è una famiglia di eventi indipendenti.