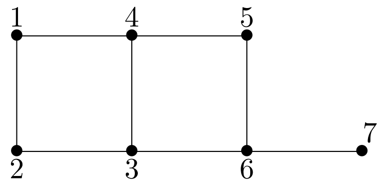
Tutorato XI
Probabilità e Statistica
a.a. 2015/2016

Argomenti: catene di Markov: probabilità e tempi medi di passaggio.

Esercizio 1. Un topolino si sposta sui vertici di un grafo come nella Figura.



Ad ogni istante, il topolino si sposta dal vertice in cui si trova ad uno di quelli adiacenti, scelto ogni volta a caso e con probabilità uniforme.

a) Giustificare l'uso di una catena di Markov per modellizzare questa situazione e scrivere la matrice di transizione.

b) Si tratta di una catena irriducibile? Regolare? Quali sono le distribuzioni stazionarie di questa catena?

Supponiamo ora che in 7 ci sia un pezzo di formaggio ed in 4 stia acquattato un gatto.

c) Qual è la probabilità che il topo riesca a raggiungere il cibo prima di imbattersi nel gatto, supponendo che esso parta dallo stato 2? Qual è lo stato partendo dal quale la probabilità è più piccola?

Esercizio 2. Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Classificare gli stati della catena e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.

b) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^2(X_n)$ ($\mathbb{E}^2$= media quando al tempo iniziale la catena si trova nello stato 2).

c) Calcolare il tempo medio di raggiungimento dello stato 3 quanto la catena parte dallo stato 2.

Esercizio 3. Consideriamo la catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ associata alla matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

dove $0 \le \alpha \le 1$.

a) Discutere le proprietà di irriducibilità e di regolarità della catena al variare di $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) Determinare le distribuzioni stazionarie della catena.

c) Calcolare, al variare di $0 < \alpha < 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^1(\log X_n)$.

d) In media quanto tempo occorre per passare dallo stato 4 allo stato 1?

Esercizio 4. Consideriamo la catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ associata alla matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

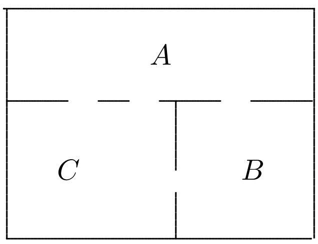
a) Classificare gli stati della catena e discutere le proprietà di irriducibilità e/o di regolarità.

b) Determinare le distribuzioni invarianti.

c) Supponiamo che la legge iniziale ν sia tale che $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Per ogni $i \in E$, calcolare $\mathbb{P}(X_n = i)$ per n grande.

d) Calcolare la probabilità di raggiungere la classe $C = \{3, 4, 5\}$ partendo dallo stato 1 oppure 2. Se invece si prende $C = \{4, 5\}$, come cambiano queste probabilità?

Esercizio 5. Un topolino vive in un ambiente formato da tre stanze, A, B, C come nella figura. Ad ogni iterazione egli si sposta dalla stanza in cui si trova in una delle altre stanze scegliendo a caso una delle aperture.



a) Qual è la probabilità che dopo n iterazioni esso si trovi nella stanza C, per n grande? Qual è la stanza in cui è meno probabile che si trovi dopo n iterazioni, sempre per n grande?

b) Quanto tempo occorre, in media, perché il topolino raggiunga la stanza C se al tempo iniziale si trova in A?

Esercizio 6. Al Luna Park, Luca e Sara si sfidano al tiro a segno, tirando una volta per ciascuno. Vince chi per primo colpisce il bersaglio. È noto che Sara colpisce il bersaglio con probabilità $1/2$ e sia α, con $0 < \alpha < 1$, la probabilità con la quale Luca tira a segno. Viene usata le seguente regola iniziale:

1. Luca comincia il gioco, oppure
2. Sara comincia il gioco, oppure
3. il primo giocatore viene scelto per sorteggio casuale.

a) Descrivere la dinamica del gioco tramite una catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena e dire quali sono le classi chiuse e le classi irriducibili.

c) Verificare che il gioco prima o poi finisce, qualunque sia la regola iniziale.

d) Calcolare la probabilità che vinca Sara e la probabilità che vinca Luca, al variare di $\alpha \in (0, 1)$, nei casi 1., 2. e 3.

e) Determinare α, qualora sia possibile, affinché Sara e Luca abbiano la stessa probabilità di vincere, per ciascuna regola iniziale 1., 2. e 3.

f) Calcolare quanto tempo in media dura il gioco con le regole iniziali 1. e 2.

Soluzioni

Esercizio 1. a) L'uso di una catena di Markov si giustifica con il fatto che, ad ogni iterazione, lo stato su cui spostarsi viene scelto in maniera indipendente dal comportamento della catena agli istanti precedenti. Si tratta quindi di una passeggiata aleatoria sul grafo della figura, e la matrice di transizione è

$$P = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac12 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac13 & 0 & \frac13 & 0 & \frac13 & 0 \\ \frac13 & 0 & \frac13 & 0 & \frac13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac13 & 0 & \frac13 & 0 & \frac13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) La catena è irriducibile, poiché il grafo è connesso e tutti gli stati comunicano. Non è regolare perché, con la numerazione prescelta, gli stati con numero pari sono adiacenti a stati con numero dispari e quindi da uno stato pari si può rientrare solo con un numero pari di volte.

La distribuzione stazionaria è unica perché la catena è irriducibile. E sappiamo che è data da $\pi_i = \frac{k_i}{k}$, dove k_i è il numero di spigoli che si dipartono dallo stato i e $k = \sum_i k_i$. Qui, ci sono tre stati (1, 2 e 5) da cui si dipartono due spigoli, tre da cui se ne dipartono tre (3, 4 e 6) ed uno da cui se ne diparte uno solo. Sommando si trova $k = 2 \times 3 + 3 \times 3 + 1 = 16$. Dunque la probabilità stazionaria è

$$\pi = \left(\tfrac18, \tfrac18, \tfrac{3}{16}, \tfrac{3}{16}, \tfrac18, \tfrac{3}{16}, \tfrac{1}{16}\right) .$$

c) Se si cambia la matrice di transizione in corrispondenza degli stati 4 e 7 facendoli diventare assorbenti, la probabilità di giungere in 7 prima che in 4 è uguale alla probabilità di passaggio in 7 per questa nuova catena, la cui matrice di transizione è

$$P = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac12 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac13 & 0 & \frac13 & 0 & \frac13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac13 & 0 & \frac13 & 0 & \frac13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le probabilità di passaggio λ_i soddisfano in questo caso al sistema lineare

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac12\,\lambda_2 \\ \lambda_2 &= \tfrac12\,\lambda_1 + \tfrac12\,\lambda_3 \\ \lambda_3 &= \tfrac13\,\lambda_2 + \tfrac13\,\lambda_6 \\ \lambda_5 &= \tfrac12\,\lambda_6 \\ \lambda_6 &= \tfrac13 + \tfrac13\,\lambda_3 + \tfrac13 \lambda_5 . \end{aligned}$$

Questo sistema ha soluzione

$$\lambda_1 = \tfrac{2}{29}, \quad \lambda_2 = \tfrac{4}{29}, \quad \lambda_3 = \tfrac{6}{29}, \quad \lambda_5 = \tfrac{7}{29}, \quad \lambda_6 = \tfrac{14}{29}\ .$$

Quindi la probabilità che il topolino ce la faccia partendo da 2 è $\lambda_2 = \frac{4}{29}$, e lo stato partendo dal quale si ha la probabilità più piccola è lo stato 1.

Esercizio 2. a) La catena è irriducibile perché tutti gli stati comunicano tra di loro. Quindi, tutti gli stati sono ricorrenti. La distribuzione stazionaria π esiste e, poiché la catena è irriducibile, è anche unica. Poiché la matrice è bistocastica, sappiamo che essa è data dalla legge uniforme su E, quindi

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}.$$

b) La catena è irriducibile e, ad esempio, $p_{11} > 0$, dunque è regolare e quindi

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad \forall\ i, j \in E.$$

Ora,

$$\mathbb{E}^2(X_n) = \sum_{j=1}^{3} j\mathbb{P}^2(X_n = j) = \sum_{j=1}^{3} jp_{2j}^{(n)}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^2(X_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{3} jp_{2j}^{(n)} = \sum_{j=1}^{3} j\pi_j = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2.$$

c) Sia $\tau_3 = \inf\{n \geq 0\ :\ X_n = 3\}$. Per $i = 1, 2$, $\zeta_i = \mathbb{E}^i(\tau_3)$ risolvono l'equazione

$$\zeta_i = 1 + \sum_{h\neq 3} p_{ih}\zeta_h.$$

Qui, si ha

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= 1 + \frac{1}{3}\zeta_1 \\
\zeta_2 &= 1 + \frac{1}{3}\zeta_1 + \frac{1}{3}\zeta_2
\end{aligned}$$

da cui si ottiene $\zeta_2 = \frac{9}{4}$.

Esercizio 3. a) Se $\alpha > 0$, allora $1 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 3 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1$. Dunque, per la proprietà transitiva gli stati comunicano e la catena è irriducibile. Se $\alpha = 0$, invece, gli stati $2, 3, 4$ sono assorbenti e 1 è transitorio, e la catena non è irriducibile, tanto meno regolare.
Se $0 < \alpha < 1$ la matrice di transizione ha degli elementi > 0 sulla diagonale. Poiché già sappiamo che è irriducibile, essa è anche regolare. Se invece $\alpha = 1$, la matrice di transizione diventa

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede che se ad un dato istante si è in $\{2,4\}$, all'istante successivo si è in $\{1,3\}$ e viceversa. Abbiamo quindi un fenomeno di periodicità e la catena non può essere regolare.

b) Supponiamo $\alpha > 0$. La distribuzione stazionaria π, che è unica dato che la catena è irriducibile e a stati finiti, è soluzione del sistema

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \alpha\pi_2 \\
\pi_2 &= (1-\alpha)\pi_2 + \alpha\pi_3 \\
\pi_3 &= (1-\alpha)\pi_3 + \alpha\pi_4 \\
\pi_4 &= \pi_1 + (1-\alpha)\pi_4
\end{aligned}$$

La seconda e la terza equazione danno subito $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4$. Queste relazioni più la prima equazione danno

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = \alpha\pi_2 + \pi_2 + \pi_2 + \pi_2 = (3+\alpha)\pi_2$$

Dunque $\pi_2 = \frac{1}{3+\alpha}$ e la distribuzione stazionaria è

$$\pi = \Big(\frac{\alpha}{3+\alpha}, \frac{1}{3+\alpha}, \frac{1}{3+\alpha}, \frac{1}{3+\alpha}\Big)\ .$$

Se invece $\alpha = 0$, si vede subito che tutte le distribuzioni invarianti sono date da $\pi = (0, a, b, 1-a-b)$, al variare di $a, b \geq 0$ e tali che $a + b \leq 1$.

c) Per $\alpha \in (0,1)$, la catena è regolare, quindi $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$. Allora,

$$\mathbb{E}^1(\log X_n) = \sum_{j=1}^{4} \log j p_{1j}^{(n)} \to \sum_{j=1}^{4} \log j \pi_j = \frac{\log 3 + 3\log 2}{3+\alpha}.$$

d) Se $\alpha = 0$, non è possibile passare per lo stato 1, quindi il tempo necessario è $+\infty$. Se inceve $\alpha > 0$, i tempi medi ζ_i di passaggio in 1 partendo dallo stato i sono le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned}
\zeta_2 &= 1 + (1-\alpha)\zeta_2 \\
\zeta_3 &= 1 + \alpha\zeta_2 + (1-\alpha)\zeta_3 \\
\zeta_4 &= 1 + \alpha\zeta_3 + (1-\alpha)\zeta_4
\end{aligned}$$

Semplificando il sistema diventa

$$\begin{aligned}
\alpha\zeta_2 &= 1 \\
\alpha\zeta_3 &= 1 + \alpha\zeta_2 \\
\alpha\zeta_4 &= 1 + \alpha\zeta_3
\end{aligned}$$

da cui si ricavano i valori uno dopo l'altro:

$$\zeta_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \zeta_3 = \frac{2}{\alpha}, \quad \zeta_4 = \frac{3}{\alpha}.$$

Esercizio 4. a) Poiché $2 \rightsquigarrow 3$ ma $3 \not\rightsquigarrow 2$, lo stato 2 è transitorio.Lo stato 1 è evidentemente assorbente, quindi ricorrente. Invece, gli stati 3, 4 e 5 sono ricorrenti. Infatti, ad esempio 3 comunica solo con 4 e con 5, e da entrambi si può tornare in 3. Inoltre, $\{3,4,5\}$ determina una classe irriducibile. La catena non è irriducibile, quindi non è regolare.

b) Il sistema $\pi P = \pi$ qui è

$$\begin{aligned}
&\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_1 \\
&\frac{1}{4}\pi_2 = \pi_2 \\
&\frac{1}{4}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 + \frac{1}{5}\pi_5 = \pi_3 \\
&\frac{1}{3}\pi_3 + \frac{2}{5}\pi_5 = \pi_4 \\
&\pi_4 + \frac{2}{5}\pi_5 = \pi_5
\end{aligned}$$

Dalle prime due equazioni, otteniamo $\pi_2 = 0$. La quinta dà $\pi_4 = \frac{3}{5}\pi_5$ e sostituiendo nella quarta otteniamo $\pi_3 = \frac{3}{5}\pi_5$. Quindi, tutte le distribuzioni invarianti sono date dal vettore $(a, 0, \frac{3}{5}b, \frac{3}{5}b, b)$, dove $a, b \geq 0$ e $a + \frac{3}{5}b + \frac{3}{5}b + b = 1$, cioè $a + \frac{11}{5}b = 1$.

c) Se inizialmente la catena non parte da 1 e/o da 2, essa si muoverà nella classe $C = \{3,4,5\}$, che è irriducibile. Ciò significa che la dinamica si evolve nella sottocatena determinata dalla classe C, che ha matrice di transizione

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

Questa sotto-catena è regolare, dunque per ogni $i, j \in \{3,4,5\}$ e n grande si ha $p_{ij}^{(n)} \simeq \bar{\pi}_j$, dove $(\bar{\pi}_3, \bar{\pi}_4, \bar{\pi}_5)$ è la distribuzione invariante associata. Essa si calcola immediatamente dalla distribuzione π calcolata nel punto precedente ponendo $a = 0$: $b = \frac{5}{11}$ e quindi $\bar{\pi}_3 = \frac{3}{11}$, $\bar{\pi}_4 = \frac{3}{11}$ e $\bar{\pi}_5 = \frac{5}{11}$. Ma allora, per n grande e $j \in \{3,4,5\}$ si ha

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i=3,4,5} \nu_i p_{ij}^{(n)} \simeq \bar{\pi}_j.$$

d) Poniamo $\tau_C = \inf\{n \geq 0 : X_n \in C\}$ e $\lambda_i = \mathbb{P}^i(\tau_C < \infty)$. Poiché $1 \not\rightsquigarrow C$, evidentemente $\lambda_1 = 0$. Poi, essendo $\{2\} = D = \{j \notin C : j \rightsquigarrow C\}$, si ha

$$\lambda_2 = \sum_{j \in C} p_{2i} + p_{22}\lambda_2$$

e quindi

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda_2$$

da cui si ottiene immediatamente $\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

Se invece $C = \{4,5\}$, ancora $\lambda_1 = 0$ perché $i \not\rightsquigarrow \{4,5\}$ e ragionevolmente λ_2 non cambia: per entrare nella classe $\{4,5\}$ la catena deve passare per lo stato 3. Comunque, possiamo anche fare i conti. In questo caso, $D = \{i \notin C : i \not\rightsquigarrow C\} = \{2,3\}$ e le probabilità di passaggio λ_2 e λ_3 partendo da 2 e 3 rispettivamente sono soluzioni di

$$\lambda_i = \sum_{j=4,5} p_{ij} + \sum_{j=2,3} p_{ij}\lambda_j, \quad i = 2,3.$$

Il sistema è quindi

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda_3$$

e si ottiene $\lambda_3 = 1$ (il che è ragionevole visto che $\{3, 4, 5\}$ è irriducibile) e ancora $\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

Esercizio 5. a) Abbiamo già visto (cfr Tutorato IX) che la dinamica del topolino, al variare del tempo, si può descrivere tramite una catena di Markov di matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ovviamente, identifichiamo la stanza A con 1, B con 2 e C con 3. Si vede subito che P^2 è tutta a termini positivi, quindi la catena è regolare. Il teorema di Markov dà

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

dove π è la distribuzione invariante, già calcolata nel foglio di esercizi del Tutorato IX:

$$\pi_1 = \frac{3}{8}, \quad \pi_2 = \frac{1}{4}, \quad \pi_3 = \frac{3}{8}.$$

Possiamo quindi rispondere alla prima domanda usando il fatto che

$$\lim_{n\to\infty} p_{i3}^{(n)} = \pi_3 = \frac{3}{8}.$$

Quindi, ovunque si trovi all'istante iniziale, dopo n passi temporali, per n grande, il topolino si troverà nella stanza C con probabilità $\frac{3}{8}$. E, con lo stesso ragionamento, la stanza meno probabile in cui si troverà il topolino dopo n iterazioni, per n grande, è B.

b) Poniamo τ_3 il tempo di primo passaggio in 3 e per $i = 1, 2$, $\xi_i = \mathbb{E}^i(\tau_3)$. Allora,

$$\xi_i = 1 + \sum_{h\neq 3} p_{ih}\xi_h, \quad i = 1, 2.$$

Dunque,

$$\xi_1 = 1 + \frac{1}{3}\xi_2$$
$$\xi_2 = 1 + \frac{1}{2}\xi_1$$

la cui soluzione è $\xi_1 = \frac{8}{5}$ e $\xi_2 = \frac{9}{5}$. La risposta è quindi $\frac{8}{5}$.

Esercizio 6. a) Etichettiamo con 1 l'ipotesi "gioca Sara" e con 2 l'ipotesi "gioca Luca". Aggiungiamo poi due stati : 0, che corrisponde all'ipotesi "Sara ha colpito il bersaglio" e 3, corrispondente a "Luca ha colpito il bersaglio". Ora, se Sara ha vinto (stato 0), il gioco si è fermato, dunque poniamo $p_{00} = 1$. Analogamente, il gioco è fermo se Luca ha colpito il bersaglio, dunque $p_{33} = 1$. Poi, se $i = 1$, cioè è Sara a tirare, Sara colpisce il bersaglio con probabilità $\frac{1}{2}$, oppure lascia il gioco a Luca, con probabilità $\frac{1}{2}$. Dunque,

$$p_{10} = \frac{1}{2}, \quad p_{12} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente, se $i = 1$, cioè è Luca a tirare, Luca colpisce il bersaglio con probabilità α, oppure lascia il gioco a Sara con probabilità $1 - \alpha$. Dunque,

$$p_{21} = 1 - \alpha, \quad p_{23} = \alpha.$$

Quindi, la matrice di transizione che descrive la dinamica del gioco è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Evidentemente, gli stati 0 e 3 sono assorbenti, quindi $\{0\}$ e $\{3\}$ sono classi irriducibili e $\{0, 3\}$ è una classe chiusa. Gli stati 1 e 2 sono entrambi transitori: entrambi comunicano con 0 e 3 ma poi sia 0 che 3 non comunicano né con 1 né con 2.

c) Posto $C = \{0, 3\}$ e preso $i = 1, 2$, osserviamo che

$$\lambda_i = \mathbb{P}^i(\tau_C < \infty)$$

dà la probabilità che il gioco finisca quando si parte da $i = 1, 2$, che corrisponde alla regola iniziale 1. e 2. rispettivamente. Infatti:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathbb{P}^1(\tau_C < \infty) = \mathbb{P}(\text{uno dei due vince} \mid \text{Sara comincia il gioco}) \\ \lambda_2 &= \mathbb{P}^2(\tau_C < \infty) = \mathbb{P}(\text{uno dei due vince} \mid \text{Luca comincia il gioco}) \end{aligned}$$

Secondo la regola 3., si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_C < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_C < \infty \mid X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(\tau_C < \infty \mid X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2) \\ &= \lambda_1 \mathbb{P}(X_0 = 1) + \lambda_2 \mathbb{P}(X_0 = 2). \end{aligned}$$

Quindi, se mostriamo che $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, troviamo che il gioco effettivamente finisce, chiunque sia il primo a giocare e con qualunque probabilità sia scelto il primo a giocare.
Usiamo il sistema che consente di trovare le probabilità di passaggio: posto $D = \{j \notin C : j \rightsquigarrow C\}$ allora

$$\lambda_i = \sum_{j \in C} p_{ij} + \sum_{j \in D} p_{ij} \lambda j.$$

Qui, $C = \{0, 3\}$ e $D = \{1, 2\}$:

$$\lambda_i = \sum_{j=0,3} p_{ij} + \sum_{j=1,2} p_{ij} \lambda j.$$

Osserviamo che $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ è l'unica soluzione del sistema:

$$1 = \sum_{j=0,3} p_{ij} + \sum_{j=1,2} p_{ij},$$

da cui l'asserto.

d) Presa $C = \{0\}$, si ha

$$\lambda_1 = \mathbb{P}^1(\tau_C < \infty) = \mathbb{P}(\text{vince Sara} \mid \text{Sara comincia il gioco})$$
$$\lambda_2 = \mathbb{P}^2(\tau_C < \infty) = \mathbb{P}(\text{vince Sara} \mid \text{Luca comincia il gioco}).$$

Qui, $D = \{j \notin C : j \rightsquigarrow C\} = \{1, 2\}$ e λ_1, λ_2 risolvono il sistema

$$\lambda_i = p_{i0} + \sum_{j=1,2} p_{ij}\lambda_j, \quad i = 1, 2.$$

Sostituendo le p_{ij}, otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_2 \\ \lambda_2 = (1-\alpha)\lambda_1 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\lambda_1 = \frac{1}{1+\alpha}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Dunque, nei casi 1. e 2. abbiamo

$$\mathbb{P}(\text{vince Sara} \mid \text{Sara comincia il gioco}) = \frac{1}{1+\alpha}$$
$$\mathbb{P}(\text{vince Sara} \mid \text{Luca comincia il gioco}) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

e per 3. otteniamo

$$\mathbb{P}(\text{vince Sara} \mid \text{il primo è scelto a caso}) = \frac{1}{1+\alpha} \times \frac{1}{2} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \times \frac{1}{2} = \frac{2-\alpha}{2(1+\alpha)}.$$

Poiché abbiamo già visto che il gioco prima o poi finisce, qualunque sia la regola d'inizio, otteniamo

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca} \mid \text{Sara comincia il gioco}) = 1 - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$
$$\mathbb{P}(\text{vince Luca} \mid \text{Luca comincia il gioco}) = 1 - \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$$
$$\mathbb{P}(\text{vince Luca} \mid \text{il primo è scelto a caso}) = 1 - \frac{1}{2(1+\alpha)} = \frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}.$$

e) Separiamo i tre casi:
caso 1.: dev'essere $\frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{2}$, che dà $\alpha = 1$, il che non è possibile (se comincia Sara, Luca dovrebbe essere infallibile...);
caso 2.: dev'essere $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{2}$, che dà $\alpha = \frac{1}{3}$ (poiché comicia a giocare, Luca dev'essere un po' svantaggiato...);
caso 3.: dev'essere $\frac{2-\alpha}{2(1+\alpha)} = \frac{1}{2}$, che dà $\alpha = \frac{1}{2}$ (totale simmetria di gioco tra Sara e Luca).

f) Il tempo di durata del gioco è $\tau_C = \inf\{n \geq 0 : X_n \in C\}$, dove $C = \{0, 3\}$ è l'insieme degli stati ricorrenti. Qui l'insieme degli stati transitori è $T = \{1, 2\}$ e sappiamo che, per $i \in T$, le corrispondenti $\zeta_i = \mathbb{E}^i(\tau_C)$ risolvono il sistema

$$\zeta_i = 1 + \sum_{h \in T} p_{ih}\zeta_h, \quad i \in T.$$

Quindi, il sistema è

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= 1 + \frac{1}{2}\zeta_2 \\ \zeta_2 &= 1 + (1-\alpha)\zeta_1\end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\zeta_1 = \frac{3}{1+\alpha} \quad \text{e} \quad \zeta_2 = \frac{2(2-\alpha)}{1+\alpha}.$$

Ovviamente ζ_1 e ζ_2 danno la durata media del gioco nell'ipotesi 1. e 2. rispettivamente.