Tutorato X
Probabilità e Statistica
a.a. 2015/2016

Argomenti: catene di Markov: classificazione degli stati; distribuzioni stazionarie; catene regolari.

Esercizio 1. Un giocatore, A, riceve da un altro giocatore, B, 1 euro con probabilità p e cede a B un euro con probabilità q, con $p, q > 0$ e $p + q = 1$. Vengono effettuate delle partite consecutive. Un modello ragionevole per questo gioco è il seguente.
Indichiamo con $\{Z_k\}_{k\geq 1}$ la successione tale che Z_k dà il guadagno o la perdita di A al tempo k (cioè alla k-esima giocata). Ovviamente $\mathbb{P}(Z_k = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Z_k = -1)$, per ogni k. Assumiamo la seguente (ragionevole) ipotesi: $Z_1, Z_2, \dots$ sono v.a. indipendenti. Il capitale del giocatore A al tempo n si può quindi rappresentare tramite una v.a. Y_n definita da:

$$Y_0 = a \text{ e per } n \geq 1,\ Y_n = a + \textstyle\sum_{k=1}^{n} Z_k.$$

a) Dimostrare che $\{Y_n\}_n$ è una catena di Markov e scrivere la matrice di transizione. La catena è irriducibile?

b) Supponiamo che A e B abbiano a disposizione un capitale iniziale che vale, rispettivamente, a e b, e che il gioco si fermi quando almeno uno dei due giocatori perde tutto il capitale. Mostrare che, con questa regola, il gioco si può descrivere con una catena di Markov $\{X_n\}_n$ costruita a partire da $\{Y_n\}_n$ imponendo che due stati (dire quali!) diventino assorbenti.

Esercizio 2. Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov su E, con E finito. Sia $C \subset E$ una classe irriducibile. Mostrare che ogni stato i di C è ricorrente.

[Oss.: potrebbe essere utile ricordare il criterio per gli stati transitori: *in una catena di Markov a stati finiti uno stato i è transitorio se e solo se esiste uno stato j tale che $i \rightsquigarrow j$ ma $j \not\rightsquigarrow i$.*]

Esercizio 3. Sia P una matrice stocastica 6×6 del tipo ($*$=numero > 0)

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

a) In riferimento alla catena di Markov che ha P come matrice di transizione, trovare tutte le classi irriducibili, gli stati assorbenti e gli stati transitori.

b) Cosa cambia se nella posizione $(5, 6)$ si sostituisce lo 0 con $*$? E se si aggiungesse un ulteriore $*$ nella posizione $(1, 4)$?

Esercizio 4. Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov su E, con funzione di transizione P. Se $C \subset E$ è una classe chiusa (non vuota), definiamo P^C la restrizione di P su C:

$$P^C = (P^C_{ij})_{i,j\in C}, \quad P^C_{ij} = P_{ij} \quad i, j \in C.$$

a) Mostrare P^C è una funzione di transizione su C e che quindi è possibile costruire una "sottocatena" di quella data con spazio degli stati C.

Per i prossimi punti, supponiamo che E sia finito.

b) Mostrare che esiste almeno una distribuzione invariante ν per la sottocatena di matrice di transizione P^C e che questa identifica una distribuzione invariante π^C per tutta la catena tramite l'uguaglianza $\pi_i^C = \nu_i$ se $i \in C$ e $\pi_i^C = 0$ se $i \notin C$ (e quindi, π^C dà "massa totale" agli stati di C).

c) Supponiamo che esistano due classi chiuse C_1 e C_2 disgiunte. Siano π^{C_1} e π^{C_2} le distribuzioni invarianti come nel punto **b)**. Mostrare che una qualsiasi combinazione lineare convessa di π^{C_1} e π^{C_2} è ancora una distribuzione invariante. Dedurre che in tal caso esistono infinite distribuzioni invarianti.

d) Dedurre che se esiste una sola distribuzione invariante allora esiste un'unica classe irriducibile.

[Oss: dati due punti x, y di uno spazio vettoriale, una *combinazione lineare convessa* di x e y è un punto del tipo $\alpha x + (1-\alpha)y$, dove $\alpha \in [0,1]$.]

Esercizio 5. Consideriamo una catena di Markov su $E = \{1,2,3,4\}$ con probabilità di transizione date da:

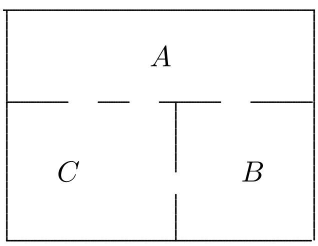
- se $i = 2,3,4$ allora $p_{i,i} = 1-p$, $p_{i,i-1} = p$, dove $0 < p < 1$;
- dallo stato $i = 1$ la catena si sposta in uno degli stati $i = 2,3,4$ scelto con probabilità uniforme.

a) Indicare quali sono gli stati transitori e quali i ricorrenti.

b) La catena è irriducibile?

c) Determinare tutte le probabilità invarianti della catena.

Esercizio 6. Un topolino vive in un ambiente formato da tre stanze, A, B, C come nella figura. Ad ogni iterazione egli si sposta dalla stanza in cui si trova in una delle altre stanze scegliendo a caso una delle aperture.



a) Costruire una catena di Markov $\{X_n\}_n$ che descriva la dinamica del topolino.

b) Se inizialmente il topolino si trova nella stanza A qual è la probabilità che sia ancora in A dopo due iterazioni? E dopo tre?

c) Al tempo iniziale, il topolino si trova nella stanza A, B oppure C con probabilità, rispettivamente, π_A, π_B oppure π_C, con $\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$. È possibile trovare π_A, π_B e π_C affinché in ogni istante continui a trovarsi nella stanza A, B e C con probabilità ancora π_A, π_B e π_C rispettivamente? In caso affermativo, calcolare tali probabilità.

Esercizio 7. Dati $\mu_i > 0$, $i \in E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\sum_{i=1}^{4} \mu_i = 1$, si consideri la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0. \end{pmatrix}$$

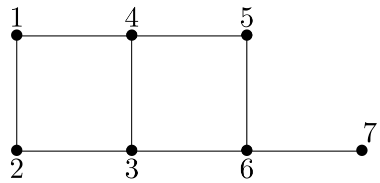
Sia ν una distribuzione su E e $(X_n)_n$ la CM con matrice di transizione a P e legge iniziale ν.

a) Classificare gli stati della catena.

b) Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, $i, j \in E$.

c) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big((X_n - 2)^2\big)$.

Esercizio 8. Un topolino si sposta sui vertici di un grafo come nella Figura.



Ad ogni istante, il topolino si sposta dal vertice in cui si trova ad uno di quelli adiacenti, scelto ogni volta a caso e con probabilità uniforme.

a) Giustificare l'uso di una catena di Markov per modellizzare questa situazione e scrivere la matrice di transizione.

b) Si tratta di una catena irriducibile? Regolare? Quali e quante sono le distribuzioni stazionarie di questa catena?

Soluzioni

Esercizio 1. a) Lo spazio degli stati qui è $E = \mathbb{Z}$. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $n \geq 1$ si ha
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_1 = i_1) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i)$$
per ogni scelta di $i, j, i_1, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che
$$Z_1 = Y_1 - a, Z_2 = Y_2 - Y_1, \dots, Z_n = Y_n - Y_{n-1}, Z_{n+1} = Y_{n+1} - Y_n$$
quindi
$$\begin{aligned}&\{Y_1 = i_1, Y_2 = i_2, \dots, Y_{n-1} = i_{n-1}, Y_n = i\} = \\ &\quad = \{Z_1 = i_1 - a, Z_2 = i_2 - i_1, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, Z_n = i - i_{n-1}\}.\end{aligned}$$
Supponiamo allora che $i_1, \dots, i_{n-1}, i$ siano tali che
$$i_1 - a, i_2 - i_1, i_{n-1} - i_{n-2}, i - i_{n-1} \in \{-1, +1\},$$
altrimenti non c'è nulla da dimostrare.
Si ha:
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_1 = i_1) = \\ &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = j \mid Z_n = i - i_{n-1}, Z_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, \dots, Z_1 = i_1 - a) \\ &= \frac{\mathbb{P}(Y_{n+1} = j, Z_n = i - i_{n-1}, Z_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, \dots, Z_1 = i_1 - a)}{\mathbb{P}(Z_n = i - i_{n-1}, Z_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, \dots, Z_1 = i_1 - a)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Z_{n+1} = j - i, Z_n = i - i_{n-1}, Z_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, \dots, Z_1 = i_1 - a)}{\mathbb{P}(Z_n = i - i_{n-1}, Z_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, \dots, Z_1 = i_1 - a)}.\end{aligned}$$
Ma le Z_k sono indipendenti, quindi
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_1 = i_1) = \\ &= \frac{\mathbb{P}(Z_{n+1} = j - i)\mathbb{P}(Z_n = i - i_{n-1})\mathbb{P}(Z_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(Z_1 = i_1 - a)}{\mathbb{P}(Z_n = i - i_{n-1})\mathbb{P}(Z_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(Z_1 = i_1 - a)} \\ &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = j - i).\end{aligned}$$
Poi,
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) = \frac{\mathbb{P}(Y_{n+1} = j, Y_n = i)}{\mathbb{P}(Y_n = i)} = \frac{\mathbb{P}(Z_{n+1} = j - i, Y_n = i)}{\mathbb{P}(Y_n = i)}.$$
Ora, Y_n è funzione di $Z_1, \dots, Z_n$, dunque è indipendente da Z_{n+1}. Possiamo allora scrivere
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid Y_n = i) = \frac{\mathbb{P}(Z_{n+1} = j - i)\mathbb{P}(Y_n = i)}{\mathbb{P}(Y_n = i)} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = j - i).$$
La proprietà di Markov è dunque verificata. Inoltre, abbiamo appena visto che la funzione di transizione è $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ dove
$$\bar{p}_{ij} = \begin{cases} p & \text{se } j = i + 1 \\ 1 - p & \text{se } j = i - 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che per ogni $i, j \in \mathbb{Z}$ si ha $i \rightsquigarrow j$. Infatti, se $j > i$ basta fare $j - i$ passi a destra; se $j < i$ basta fare $i - j$ passi a sinistra; se $j = i$ basta osservare che $i \rightsquigarrow i + 1 \rightsquigarrow i$, e quindi $i \rightsquigarrow i$. Dunque, tutti gli stati comunicano tra di loro, cioè la catena è irriducibile.

b) Se il gioco si ferma quando uno dei due perde tutto, basta imporre le condizioni $p_{00} = 1$ e $p_{a+b,a+b} = 1$. Quindi, lo spazio degli stati qui è $\{0, 1, \dots, a + b\}$ (in tutti gli altri non si può arrivare!) e la matrice di transizione di $\{X_n\}_n$ è

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j = 0 \text{ oppure } i = j = a + b \\ p & \text{se } 0 \le j = i + 1 \le a + b \\ 1 - p & \text{se } 0 \le j = i - 1 \le a + b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $i \in C$ e $j \in E$. Se $j \notin C$ allora $i \not\rightsquigarrow j$ perché C è una classe chiusa. Se invece $j \in C$ allora $i \rightsquigarrow j$ e $j \rightsquigarrow i$ perché C è irriducibile. Quindi, non esiste alcun j tale che $i \rightsquigarrow j$ e $j \not\rightsquigarrow i$. Per il criterio sugli stati transitori per le CM a stati finiti, i non è transitorio, quindi è ricorrente.

Esercizio 3. a) Evidentemente 6 è uno stato assorbente. Poi, $1 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1$ e $1, 2 \not\rightsquigarrow j$ per ogni $j \neq 1, 2$, quindi $\{1, 2\}$ è una classe irriducibile. Analogamente, $3 \rightsquigarrow 5 \rightsquigarrow 3$ e $3, 5 \not\rightsquigarrow j$ per ogni $j \neq 3, 5$, quindi anche $\{3, 5\}$ è una classe irriducibile. Infine, $4 \rightsquigarrow 6$ e $6 \not\rightsquigarrow 4$, quindi 4 è uno stato transitorio.

b) Se si aggiunge un $*$ nella posizione $(5, 6)$, ovviamente non succede nulla a $\{1, 2\}$ e $\{6\}$, che rimangono irriducibili. Ora però $3 \rightsquigarrow 6$, $5 \rightsquigarrow 6$ ma $6 \not\rightsquigarrow 3$, $6 \not\rightsquigarrow 5$, quindi gli stati transitori sono ora $3, 4, 5$.
Se si aggiunge un ulteriore $*$ nella posizione $(1, 4)$, si ha $1, 2 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 6$, quindi $1, 2 \rightsquigarrow 6$. Ma $6 \not\rightsquigarrow 1, 2$, quindi anche 1 e 2 sono transitori. Quindi, in questo caso tutti gli stati sono transitori eccetto lo stato 6, che è ricorrente e anzi assorbente.

Esercizio 4. a) Basta mostrare che P^C è a valori ≥ 0 e che la somma sulle righe è 1. Infatti, $P^C_{ij} = P_{ij} \ge 0$, per ogni $i, j \in C$. Inoltre, fissato $i \in C$, si ha

$$\sum_{j \in C} P^C_{ij} = \sum_{j \in C} P_{ij} = \sum_{j \in E} P_{ij} - \sum_{j \notin C} P_{ij} = 1 - \sum_{j \notin C} P_{ij}.$$

Essendo C chiusa, se $i \in C$ allora $P_{ij} = 0$ per ogni $j \notin C$ (infatti, se per qualche $j \notin C$ si avesse $P_{ij} > 0$ allora $i \rightsquigarrow j$, il che non è vero perché C è chiusa). Ma allora $\sum_{j \in C} P^C_{ij} = 1$, e quindi P^C determina effettivamente una funzione di transizione su C.

D'ora in poi supporremo E finito.

b) Consideriamo la "sottocatena" costituta dagli stati di C: abbiamo visto che è ben posta e che ha matrice di transizione P^C. Essendo $\#C < \infty$, per il teorema di Markov Kakutani esiste almeno una distribuzione invariante, che chiamiamo ν. Definiamo ora π^C la distribuzione su E fatta così:

$$\pi^C_i = \nu_i \text{ se } i \in C \text{ e } \pi^C_i = 0 \text{ se } i \in E \setminus C.$$

π^C è una distribuzione su E: $\pi^C_i \ge 0$ per ogni i e

$$\sum_{i \in E} \pi^C_i = \sum_{i \in C} \pi^C_i = \sum_{i \in C} \nu_i = 1.$$

Mostriamo che è invariante: per ogni $i \in E$, si ha

$$(\pi^C P)_i = \sum_{k \in E} \pi_k^C P_{ki} = \sum_{k \in C} \pi_k^C P_{ki} = \sum_{k \in C} \nu_k P_{ki}$$

Ora, se $i \in C$ allora $P_{ki} = P_{ki}^C$ e quindi

$$(\pi^C P)_i = \sum_{k \in C} \nu_k P_{ki}^C = \nu_i = \pi_i^C$$

perché ν è una distribuzione invariante su C. Se invece $i \notin C$ allora $P_{ki} = 0$, altrimenti si avrebbe $k \rightsquigarrow i$ con $k \in C$ e $i \notin C$, il che non è possibile (C è chiusa). Dunque,

$$(\pi^C P)_i = \sum_{k \in C} \nu_k P_{ki} = 0 = \pi_i^C.$$

Dunque, π^C è effettivamente una distribuzione invariante.

c) Per $\alpha \in [0,1]$, poniamo $\pi = \alpha\pi^{C_1} + (1-\alpha)\pi^{C_2}$. Allora, per ogni $i \in E$ si ha $\pi_i = \alpha\pi_i^{C_1} + (1-\alpha)\pi_i^{C_2} \geq 0$ perché tutti i fattori che costituiscono gli addendi sono non negativi. Inoltre,

$$\sum_{i \in E} \pi_i = \sum_{i \in E} \big(\alpha\pi_i^{C_1} + (1-\alpha)\pi_i^{C_2}\big) = \alpha \underbrace{\sum_{i \in E} \pi_i^{C_1}}_{=1} + (1-\alpha) \underbrace{\sum_{i \in E} \pi_i^{C_2}}_{=1} = \alpha + 1 - \alpha = 1.$$

(Nota: dalle due relazioni precedenti, troviamo facilmente che una combinazione lineare di due distribuzioni è ancora una distribuzione se e solo se è una combinazione lineare convessa!!). Dunque π è una distribuzione su E. Mostriamo che è invariante:

$$\pi P = \big(\alpha\pi^{C_1} + (1-\alpha)\pi^{C_2}\big)P = \alpha\pi^{C_1}P + (1-\alpha)\pi^{C_2}P = \alpha\pi^{C_1} + (1-\alpha)\pi^{C_2} = \pi.$$

Quindi, esistono infinite distribuzioni invarianti.

d) Se esistessero due classi irriducibili, esisterebbero due classi chiuse disgiunte e dal punto precedente si potrebbero costruire infinite distribuzioni invarianti, e ciò è assurdo.

Esercizio 5. La matrice di transizione associata alla catena è data da:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$$

a) Osserviamo che tutti gli stati comunicano tra di loro, dunque non ci sono stati transitori. Infatti, preso $i = 1$ allora $1 \rightsquigarrow j$ per ogni $j \neq 1$ in un solo passo e $1 \rightsquigarrow 1$ perché, ad esempio, $1 \rightsquigarrow 2$ e $2 \rightsquigarrow 1$. Se invece $i \neq 1$, allora $i \rightsquigarrow 1$ perché $i \rightsquigarrow i-1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow 1$, e quindi $i \rightsquigarrow j$ per ogni j perché abbiamo già visto che $1 \rightsquigarrow j$.

b) Per quello che abbiamo detto in **a)**, tutti gli stati comunicano tra loro, quindi la catena è irriducibile.

c) Per il teorema di Markov-Kakutani, esiste almeno una distribuzione invariante. Studiamo quindi le soluzioni (intese come vettori riga) $\pi \in \mathbb{R}^4$ del sistema $\pi P = \pi$ tali che $\pi_i \geq 0$ per ogni i e $\pi_1 + \cdots + \pi_4 = 1$. Il sistema si può scrivere come segue:

$$\begin{cases} p\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_1 + (1-p)\pi_2 + p\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_1 + (1-p)\pi_3 + p\pi_4 = \pi_3 \\ \frac{1}{3}\pi_1 + (1-p)\pi_4 = \pi_4. \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è

$$\pi_2 = \frac{1}{p}\pi_1, \quad \pi_3 = \frac{2}{3p}\pi_1, \quad \pi_4 = \frac{1}{3p}\pi_1.$$

Perché la soluzione sia una distribuzione di probabilità dev'essere necessariamente $\pi_1 > 0$ e $1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$. Sostituendo, si ottiene facilmente che $\pi_1 = \frac{p}{2+p}$. Dunque, per questa catena esiste una sola distribuzione invariante data da

$$\pi_1 = \frac{p}{2+p}, \quad \pi_2 = \frac{1}{2+p}, \quad \pi_3 = \frac{2}{3(2+p)}, \quad \pi_4 = \frac{1}{3(2+p)}.$$

Esercizio 6. **a)** Costruiamo una CM che dia, ad ogni istante n, la stanza in cui si trova il topolino. Gli stati della catena rappresentano ovviamente le stanze in cui può trovarsi il topolino. Etichettiamo quindi le stanze come segue: stanza A = stato 1, stanza B = stato 2, stanza C = stato 3.
Sia $\{X_n\}_n$ il processo tale che X_n dà la stanza in cui si trova il topolino al tempo n. Cerchiamo $p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$:

- $i = 1$: all'istante successivo può andare in 2 o in 3; ha a disposizione tre uscite, una porta in 2 e due portano in 3, quindi

$$p_{11} = 0, \quad p_{12} = \frac{1}{3}, \quad p_{13} = \frac{2}{3};$$

- $i = 2$: all'istante successivo può andare in 1 o in 3; ha a disposizione due uscite, una porta in 1 e una porta in 3, quindi

$$p_{21} = \frac{1}{2}, \quad p_{22} = 0, \quad p_{23} = \frac{1}{2};$$

- $i = 3$: all'istante successivo può andare in 1 o in 2; ha a disposizione tre uscite, due portano in 1 e una porta in 3, quindi

$$p_{31} = \frac{2}{3}, \quad p_{32} = \frac{1}{3}, \quad p_{33} = 0.$$

La matrice di transizione è quindi data da

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Se il topolino inizialmente si trova nella stanza A significa che la distribuzione iniziale è $\nu = (1, 0, 0)$. Si troverà nuovamente in A dopo n iterazioni con probabilità

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_i \nu_i p_{i1}^{(n)} = \big(\nu P^n\big)_1.$$

Qui, siamo interessati a $n = 2$ e $n = 3$. Abbiamo

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & \frac{11}{18} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{27} & \frac{14}{27} \\ \frac{7}{18} & \frac{2}{9} & \frac{7}{18} \\ \frac{14}{27} & \frac{7}{27} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{11}{18} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{2}{9}.$$

c) Indichiamo con ν la distribuzione iniziale: $\nu_1 = \pi_A$, $\nu_2 = \pi_B$, $\nu_3 = \pi_C$. Chiede ν tale che $\mathbb{P}(X_n = i) = \nu_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$. Poiché si ha $\mathbb{P}(X_n = i) = (\nu P^n)_i$, chiede ν tale che

$$\nu P^n = \nu \quad \text{per ogni } n.$$

In particolare, $\nu P = \nu$, e quindi $\nu P^n = \nu P P^{n-1} = \nu P^{n-1} = \cdots = \nu$. Quindi, chiede ν tale che $\nu P = \nu$, ovvero si chiede una distribuzione stazionaria.
Poiché la catena è a stati finiti, esiste almeno una distribuzione stazionaria. Calcoliamo quindi tutte le soluzioni del sistema $\nu P = \nu$ che siano anche distribuzioni di probabilità. Si ha: $\nu P = \nu$ se e solo se $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\nu_2 + \frac{2}{3}\nu_3 = \nu_1 \\ \frac{1}{3}\nu_1 + \frac{1}{3}\nu_3 = \nu_2 \\ \frac{2}{3}\nu_1 + \frac{1}{2}\nu_2 = \nu_3 \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} 6\nu_1 - 3\nu_2 - 4\nu_3 = 0 \\ \nu_1 - 3\nu_2 + \nu_3 = 0 \\ 4\nu_1 + 3\nu_2 - 6\nu_3 = 0. \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza equazione si trova $\nu_1 = \nu_3 = \alpha$; sostituendo nella prima si ottiene $\nu_2 = \frac{2}{3}\alpha$. Imponendo la condizione che sia una legge di probabilità, otteniamo $\alpha > 0$ e $\alpha + \frac{2}{3}\alpha + \alpha = 1$, la cui soluzione è $\alpha = \frac{3}{8}$. Dunque,

$$\nu_1 = \frac{3}{8}, \quad \nu_2 = \frac{1}{4}, \quad \nu_3 = \frac{3}{8}.$$

Esercizio 7. a) Tutti gli stati comunicano tra di loro, quindi la catena è irriducibile. Ed essendo $p_{11} = \mu_1 > 0$, è anche regolare.
b) Per il teorema di Markov, il limite esiste e si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ per ogni $i, j \in E$, dove π è la distribuzione stazionaria. Per calcolarla consideriamo il sistema $\pi P = \pi$, cioè

$$\begin{cases} \mu_1\pi_1 + \pi_2 = \pi_1 \\ \mu_2\pi_1 + \pi_3 = \pi_2 \\ \mu_3\pi_1 + \pi_4 = \pi_3 \\ \mu_4\pi_1 = \pi_4 \end{cases}$$

Otteniamo

$$\pi_4 = \mu_4\pi_1, \quad \pi_3 = (\mu_3 + \mu_4)\pi_1, \quad \pi_2 = (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)\pi_1$$

e $\pi_1 = (\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)\pi_1 = \pi_1$, il che è ovvio. Ora, imponendo la condizione che dev'essere una distribuzione, otteniamo

$$1 = \pi_1(1 + \mu_2 + 2\mu_3 + 3\mu_4).$$

Quindi,

$$\pi_1 = \frac{1}{1 + \mu_2 + 2\mu_3 + 3\mu_4}, \quad \pi_2 = \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{1 + \mu_2 + 2\mu_3 + 3\mu_4},$$
$$\pi_3 = \frac{\mu_3 + \mu_4}{1 + \mu_2 + 2\mu_3 + 3\mu_4}, \quad \pi_4 = \frac{\mu_4}{1 + \mu_2 + 2\mu_3 + 3\mu_4}.$$

c) Osserviamo che, per ogni funzione f,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(f(X_n)\big) &= \sum_{j=1}^{4} f(j)\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{j=1}^{4} f(j) \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)\mathbb{P}(X_0 = i) \\ &= \sum_{j=1}^{4} f(j) \sum_{i=1}^{4} p_{ij}^{(n)} \nu_i = \sum_{i=1}^{4} \nu_i \sum_{j=1}^{4} f(j) p_{ij}^{(n)}\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(f(X_n)\big) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{4} \nu_i \sum_{j=1}^{4} f(j)p_{ij}^{(n)} = \sum_{i=1}^{4} \nu_i \sum_{j=1}^{4} f(j) \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{4} \nu_i \sum_{j=1}^{4} f(j)\pi_j = \sum_{j=1}^{4} f(j)\pi_j\end{aligned}$$

cioè, indipendentemente dalla distribuzione iniziale, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(f(X_n)\big)$ è la media di $f(X)$ dove X ha legge uguale alla distribuzione stazionaria. Qui, $f(x) = (x-2)^2$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big((X_n - 2)^2\big) = 9\pi_1 + 4\pi_2 + \pi_3 = \frac{9 + 4\mu_2 + 5\mu_3 + 5\mu_4}{1 + \mu_2 + 2\mu_3 + 3\mu_4}.$$

Esercizio 8. **a)** L'uso di una catena di Markov si giustifica con il fatto che, ad ogni iterazione, lo stato su cui spostarsi viene scelto in maniera indipendente dal comportamento della catena agli istanti precedenti. Si tratta quindi di una passeggiata aleatoria sul grafo della figura, e la matrice di transizione è

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) La catena è irriducibile, poiché il grafo è connesso e tutti gli stati comunicano. Non è regolare perché, con la numerazione prescelta, gli stati con numero pari sono adiacenti a stati con numero dispari e quindi da uno stato pari si può rientrare solo con un numero pari di volte.
La distribuzione stazionaria è unica perché la catena è irriducibile. E sappiamo che è data da $\pi_i = \frac{k_i}{k}$, dove k_i è il numero di spigoli che si dipartono dallo stato i e $k = \sum_i k_i$. Qui, ci sono tre stati (1, 2 e 5) da cui si dipartono due spigoli, tre da cui se ne dipartono tre (3, 4 e 6) ed uno da cui se ne diparte uno solo. Sommando si trova $k = 2 \times 3 + 3 \times 3 + 1 = 16$. Dunque la probabilità stazionaria è

$$\pi = \left(\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{16}, \tfrac{3}{16}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{16}, \tfrac{1}{16}\right) .$$