II esonero di Probabilità e Statistica
a.a. 2015/2016
6 Giugno 2016

Esercizio 1. Sia (X,Y) una v.a. in $\mathbb{R}^2$ con densità continua

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n!}(x-y)^n e^{-x} 1\!\!1_{x>y>0},$$

dove $n \in \mathbb{N}$ è un parametro fissato.

a) Posto $U = X$ e $V = e^{X-Y}$, calcolare la legge congiunta di (U,V).

b) Verificare che la v.a. V^α è ben posta per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ affinché V^α abbia media.

Esercizio 2. Per $\lambda > 0$ e $p \in (0,1)$ fissati, siano $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Geomod}(p)$ e $X \perp\!\!\!\perp Y$.

a) Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, scrivere la funzione caratteristica di $Z = \alpha X + \beta Y$.

b) Per $n \geq 1$ intero, scegliamo $\alpha = \alpha_n = \frac{1}{n}$, $\lambda = \lambda_n = n$, $p = p_n = e^{-\frac{1}{n}}$. Sia Z_n la v.a. definita nel punto **a)** con questa scelta dei parametri. Studiare la convergenza in legge di $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

c) Come in **b)** ma con la scelta: $\alpha = \alpha_n = \frac{1}{n}$, $\lambda = \lambda_n = n$, $p = p_n = e^{-n}$.

Esercizio 3. Due campioni casuali $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$ e $\{Y_i\}_{i=1,\ldots,n}$ vengono estratti da due popolazioni normali ed indipendenti, rispettivamente di media μ_X e μ_Y e di varianza $\sigma_X^2 = 6$ e $\sigma_Y^2 = 3$.

a) Supponiamo $n = 100$. Scrivere un intervallo di fiducia al 95% per $\mu = \mu_X - \mu_Y$.

b) Calcolare n affinché

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) > n(\mu_X + \mu_Y) - 0.1\, n\Big) \leq 0.85.$$

Esercizio 4. Consideriamo una catena di Markov $\{X_n : n \geq 0\}$ su $E = \{1,2,3,4\}$. La sua dinamica è la seguente: ad ogni passo la catena resta in un qualsiasi stato $i \in E$ con probabilità $i/4$; altrimenti compie una transizione in uno degli altri stati scelti a caso.

a) Classificare gli stati della catena.

b) Supponiamo che per qualche $\alpha \in [0,1]$ si abbia $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \alpha$ e $\mathbb{P}(X_0 = 2) = 1 - \alpha$. Dire per quale valore di α si ha $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/5$.

c) Calcolare la probabilità di passaggio per $\{2,3\}$ partendo dallo stato 1.

d) Calcolare il tempo medio di passaggio per $\{4\}$ partendo dallo stato 3.

Soluzioni

Esercizio 1. a) Usiamo il TCV: posto $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\phi(x,y) = (x, e^{x-y})$, ϕ è un diffeomorfismo e la sua inversa è $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$, $\psi(u,v) = (u, u - \ln v)$. La matrice jacobiana di ψ è

$$D\psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{v} \end{pmatrix}$$

e quindi $\det D\psi(u,v) = -\frac{1}{v}$. Allora,

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(u, u - \ln v)\Big| -\frac{1}{v}\Big| = \frac{1}{n!}(\ln v)^n e^{-u} 1\!\!1_{u > u - \ln v > 0} \frac{1}{|v|}.$$

La relazione $u > u - \ln v > 0$ dà $u > 0$ e $0 < \ln v < u$, cioè $1 < v < e^u$. Dunque,

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln v)^n}{v} e^{-u} 1\!\!1_{u>0} 1\!\!1_{1<v<e^u}.$$

b) Calcoliamo dapprima la densità di V:

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)du = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n!}\frac{(\ln v)^n}{v} e^{-u} 1\!\!1_{u>0} 1\!\!1_{1<v<e^u} du = \frac{1}{n!}\frac{(\ln v)^n}{v} 1\!\!1_{v>1} \int_{\ln v}^{+\infty} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{n!}\frac{(\ln v)^n}{v^2} 1\!\!1_{v>1}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $V > 1$ q.c. quindi V^α è ben posta e, in particolare, è positiva. Studiamone la media:

$$\mathbb{E}(V^\alpha) = \int_{\mathbb{R}} v^\alpha f_V(v)dv = \frac{1}{n!}\int_1^{+\infty} v^{\alpha-2}(\ln v)^n dv.$$

Il cambio di variabile $v = e^x$ dà

$$\mathbb{E}(V^\alpha) = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-2)x} x^n \times e^x dx = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{(\alpha-1)x} dx.$$

Dunque, se $\alpha - 1 \ge 0$, cioè $\alpha \ge 1$, la funzione integranda non è integrabile su $(0, +\infty)$, quindi $\mathbb{E}(V^\alpha)$ non esiste. Se invece $\alpha < 1$, si ha

$$\mathbb{E}(V^\alpha) = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-\alpha)x} dx.$$

Ora, nella funzione integranda riconosciamo (a meno della costante) la densità $\Gamma(n+1, 1-\alpha)$. Quindi,

$$\mathbb{E}(V^\alpha) = \frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} x^{(n+1)-1} e^{-(1-\alpha)x} dx}_{=1} = \frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}}.$$

Esercizio 2. a) Ricordiamo che se $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ allora $\varphi_X(\theta) = e^{\lambda(e^{i\theta}-1)}$ e se $Y \sim \mathrm{Geomod}(p)$ allora $\varphi_Y(\theta) = \frac{pe^{i\theta}}{1-(1-p)e^{i\theta}}$. Quindi, ricordando che $X \perp\!\!\!\perp Y$ ed usando le proprietà della f.c.,

$$\varphi_Z(\theta) = \varphi_{\alpha X + \beta Y}(\theta) = \varphi_{\alpha X}(\theta)\varphi_{\beta Y}(\theta) = \varphi_X(\alpha\theta)\varphi_Y(\beta\theta) = e^{\lambda(e^{i\alpha\theta}-1)} \frac{pe^{i\beta\theta}}{1-(1-p)e^{i\beta\theta}}$$

b) Da **a)**, si ha

$$\varphi_{Z_n}(\theta) = e^{n(e^{i\frac{\theta}{n}}-1)} \frac{e^{-\frac{1}{n}+i\beta\theta}}{1-(1-e^{-\frac{1}{n}})e^{i\beta\theta}}.$$

Studiamo il limite per $n \to \infty$. Poiché, per $z \in \mathbb{C}$, $e^z - 1 = z + o(z)$ quando $z \simeq 0$, otteniamo facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(\theta) = e^{i\theta}e^{i\beta\theta} = e^{i(1+\beta)\theta},$$

che è la f.c. della v.a. (costante) $1+\beta$, quindi $Z_n \to 1+\beta$ in legge, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

c) Da **a)**, si ha

$$\varphi_{Z_n}(\theta) = e^{n(e^{i\frac{\theta}{n}}-1)} \frac{e^{-n+i\beta\theta}}{1-(1-e^{-n})e^{i\beta\theta}} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta \neq 0 \\ e^{i\theta} & \text{se } \beta = 0. \end{cases}$$

Dunque, se $\beta \neq 0$, il limite delle funzioni caratteristiche non è una funzione caratteristica (la f.c. deve sempre valere 1 in 0), da cui segue che $\{Z_n\}_n$ non converge in legge. Se invece $\beta = 0$, otteniamo al limite la f.c. della v.a. che vale identicamente 1, quindi $Z_n \to 1$ in legge.

Esercizio 3. a) La differenza delle medie $\mu = \mu_X - \mu_Y$ risulta la media di $Z_i = X_i - Y_i$, quindi $Z_1, \dots, Z_{100}$ è un campione lungo 100 per la stima di μ. Osserviamo che, essendo le X_i indipendenti tra loro, le Y_i idem ed essendo i due campioni indipendenti, otteniamo che le Z_i sono indipendenti ed inoltre (poiché $X_i \perp\!\!\!\perp Y_i$) Z_i è normale, di media (incognita) μ e varianza $\mathrm{Var}(Z_i) = \mathrm{Var}(X_i) + \mathrm{Var}(Y_i) = 9$. Quindi, un IF esatto per μ a livello richiesto è dato dall'intervallo aleatorio I di estremi

$$\bar{Z}_{100} \pm \sqrt{\frac{9}{100}}\,1.96 = \bar{Z}_{100} \pm 0.588,$$

dove $\bar{Z}_{100} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} Z_i$.

b) Le v.a. $X_i + Y_i$, $i = 1, \dots, n$, sono indipendenti e gaussiane di media $\mu_X + \mu_Y$ e varianza $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 9$. Quindi $\sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) \sim \mathrm{N}(n(\mu_X + \mu_Y), 9n)$. Allora,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^n (X_i+Y_i) > n(\mu_X+\mu_Y) - 0.1\,n\Big) &= \mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i+Y_i) - n(\mu_X+\mu_Y)}{\sqrt{9n}} > -\frac{0.1n}{\sqrt{9n}}\Big) \\ &= \mathbb{P}\big(Z > -\frac{0.1}{3}\sqrt{n}\big)\end{aligned}$$

e $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Dunque, detta Φ la f.r. della legge normale standard,

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^n (X_i+Y_i) > n(\mu_X+\mu_Y) - 0.1\sqrt{n}\Big) = 1 - \Phi\Big(-\frac{0.1}{3}\sqrt{n}\Big) = \Phi\Big(\frac{0.1}{3}\sqrt{n}\Big).$$

Deve quindi essere

$$\Phi\Big(\frac{0.1}{3}\sqrt{n}\Big) \leq 0.85 = \Phi(1.04),$$

cioè

$$\frac{0.1}{3}\sqrt{n} \leq 1.04$$

che dà $n \leq (31.2)^2$, da cui segue che $n \leq 973$.

Esercizio 4. Prima di tutto dobbiamo trovare la matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$. Si ha

$$p_{ij} = \begin{cases} i/4 & \text{se } i = j \\ (1 - i/4)/3 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

e quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/12 & 1/12 & 3/4 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Lo stato 4 è ricorrente perché è uno stato assorbente. Gli stati $1, 2, 3$ sono transitori perché, per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$, i comunica con 4 ma (ovviamente) 4 non comunica con i.

b) Si deve considerare la seguente relazione matriciale

$$(\alpha, 1 - \alpha, 0, 0) \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/12 & 1/12 & 3/4 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (p_1, p_2, p_3, p_4),$$

dove $p_i = \mathbb{P}(X_1 = i)$ per ogni $i \in E$. Allora, se imponiamo la condizione $p_1 = 1/5$, si deve avere

$$\frac{\alpha}{4} + \frac{1 - \alpha}{6} = \frac{1}{5},$$

da cui segue

$$\alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}, \ \frac{\alpha}{12} = \frac{1}{30}, \ \alpha = \frac{12}{30}.$$

c) Consideriamo le probabilità di passaggio $\{\lambda_i : i \in D_C\}$ per $C = \{2, 3\}$, dove D_C è l'insieme degli stati non appartenenti a C e che comunicano con C. Quindi si ha $D_C = \{1\}$ e si deve considerare la seguente equazione

$$\lambda_1 = p_{12} + p_{13} + p_{11}\lambda_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda_1$$

da cui segue

$$\frac{3}{4}\lambda_1 = \frac{2}{4}, \ \lambda_1 = \frac{2}{3}.$$

Si osservi che, per costruzione, si deve avere

$$1 - \lambda_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (p_{11})^n p_{14};$$

il valore ottenuto è in accordo con tale uguaglianza perché si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (p_{11})^n p_{14} = \sum_{n=0}^{\infty} (1/4)^{n+1} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

d) Sia $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n = 4\}$ e poniamo $\mu_i = \mathbb{E}[\tau | X_0 = i]$ per $i \in \{1, 2, 3\}$. Allora si deve considerare il seguente sistema

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + p_{11}\mu_1 + p_{12}\mu_2 + p_{13}\mu_3 = 1 + \frac{\mu_1}{4} + \frac{\mu_2}{4} + \frac{\mu_3}{4} \\ \mu_2 = 1 + p_{21}\mu_1 + p_{22}\mu_2 + p_{23}\mu_3 = 1 + \frac{\mu_1}{6} + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\mu_3}{6} \\ \mu_3 = 1 + p_{31}\mu_1 + p_{32}\mu_2 + p_{33}\mu_3 = 1 + \frac{\mu_1}{12} + \frac{\mu_2}{12} + \frac{3\mu_3}{4}, \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} 3\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 4 \\ -\mu_1 + 3\mu_2 - \mu_3 = 6 \\ -\mu_1 - \mu_2 + 3\mu_3 = 12. \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$\mu_1 = \frac{13}{2}, \quad \mu_2 = 7, \quad \mu_3 = \frac{17}{2}.$$

In conclusione il valor medio richiesto è $\mu_3 = \frac{17}{2}$.