I esonero di Probabilità e Statistica
a.a. 2015/2016
23 Aprile 2016

Esercizio 1. Dire se le seguenti affermazioni **a)** e/o **b)** sono vere o false, motivando accuratamente la risposta.

Siano X e Y due v.a. con momento secondo finito. Allora:

a) $\mathrm{Cov}(X-Y, X+Y) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$;

b) *se per di più $X \perp\!\!\!\perp Y$ allora* $\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$.

Esercizio 2. Un'urna contiene 5 monete di cui 4 equilibrate e 1 truccata che dà T con probabilità $\frac{3}{4}$.

a) Una moneta viene scelta a caso e lanciata. Qual è la probabilità di avere T?

b) Una moneta viene scelta a caso e lanciata 4 volte. Qual è la probabilità di avere T esattamente 3 volte?

c) Una moneta viene scelta a caso e lanciata 4 volte. Sapendo che si è ottenuto T esattamente 3 volte, qual è la probabilità che si tratti di una delle monete truccate?

d) Per 4 volte si estrae una moneta, la si lancia e la si rimette nell'urna. Qual è la probabilità di ottenere esattamente 3 volte T?

Esercizio 3. Sia (X, Y) una v.a. discreta con densità congiunta

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda} 1\!\!1_{x\geq 1}\big(\gamma 1\!\!1_{y=x} + (1-\gamma) 1\!\!1_{y=-x}\big), \quad x, y \in \mathbb{Z},$$

dove $\lambda > 0$ e $\gamma \in (0,1)$ sono parametri fissati.

a) Calcolare $\mathbb{P}(X - Y \geq 5)$ e $\mathbb{E}(Y(X-1))$.

b) Verificare che la v.a. $U = (X + 2Y)/X$ è ben posta e scrivere la densità congiunta di X e U. X e U sono indipendenti?

c) Determinare, se possibile, γ in modo tale che $\mathbb{E}(XU^2) = 2$.

Esercizio 4. Siano X e Y v.a. discrete ed indipendenti, con speranza matematica finita. Dimostrare che $\mathbb{E}(X + Y \mid Y = y) = \mathbb{E}(X) + y$.

Soluzioni

Esercizio 1. a) Vero. Infatti, ricordando che Cov è bilineare e simmetrica,

$$\mathrm{Cov}(X-Y,X+Y)=\underbrace{\mathrm{Cov}(X,X)}_{=\mathrm{Var}(X)}+\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(X,Y)-\underbrace{\mathrm{Cov}(Y,Y)}_{=\mathrm{Var}(Y)}=\mathrm{Var}(X)-\mathrm{Var}(Y).$$

b) In generale, falso (falsissimo!). Intanto perché, se fosse vero, dovrebbe essere $\mathrm{Var}(X)\geq\mathrm{Var}(Y)$ (perché $\mathrm{Var}(X-Y)\geq 0$). La relazione corretta è $\mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$ perché:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X-Y)&=\mathrm{Var}(X)+\underbrace{\mathrm{Var}(-Y)}_{=(-1)^2\mathrm{Var}(Y)}+\underbrace{\mathrm{Cov}(X,-Y)}_{=-\mathrm{Cov}(X,Y)=0\text{ perché }X\perp\!\!\!\perp Y}\\&=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y).\end{aligned}$$

L'affermazione è dunque vera se e solo se $\mathrm{Var}(Y)=0$, cioè Y è una costante.

Esercizio 2. Indichiamo con E l'evento "la moneta prescelta è equilibrata", con N l'evento "la moneta prescelta è non è equilibrata" e con T l'evento "la moneta prescelta ha dato testa". Dai dati del problema abbiamo

$$\mathbb{P}(E)=\frac{4}{5},\quad\mathbb{P}(N)=\frac{1}{5},\quad\mathbb{P}(T\mid E)=\frac{1}{2},\quad\mathbb{P}(T\mid N)=\frac{3}{4}$$

a) Per la formula delle probabilità totali si ha

$$\mathbb{P}(T)=\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(T\mid E)+\mathbb{P}(N)\mathbb{P}(T\mid N)=\frac{4}{5}\,\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\,\frac{3}{4}=\frac{11}{20}\,\cdot$$

b) La probabilità di ottenere testa 3 volte in 4 lanci con la moneta equilibrata (4 prove ripetute indipendenti) è dato dalla legge binomiale $B(4,\frac{1}{2})$. Dunque, se indichiamo con A l'evento "la moneta estratta dà esattamente 3 teste in 4 lanci",

$$\mathbb{P}(A\mid E)=\binom{4}{3}\frac{1}{2^4}\,\cdot$$

Per lo stesso motivo la probabilità di ottenere 3 teste in 4 lanci della moneta truccata è dato dalla legge binomiale $B(4,\frac{3}{4})$ cioè

$$\mathbb{P}(A\mid N)=\binom{4}{3}\Big(\frac{3}{4}\Big)^3\frac{1}{4}$$

Dunque, sempre per la formula delle probabilità totali, si ha

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(A\mid E)+\mathbb{P}(N)\mathbb{P}(A\mid N)=\frac{4}{5}\binom{4}{3}\frac{1}{2^4}+\frac{1}{5}\binom{4}{3}\Big(\frac{3}{4}\Big)^3\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\,\frac{27}{64}=\frac{91}{5\cdot 64}=0.284.$$

c) Si tratta di calcolare $\mathbb{P}(N\mid A)$. Per la formula di Bayes

$$\mathbb{P}(N\mid A)=\frac{\mathbb{P}(N)\mathbb{P}(A\mid N)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\frac{1}{5}\,\frac{27}{64}}{\frac{1}{5}\,\frac{91}{64}}=\frac{27}{91}=0.297\,.$$

d) Si tratta di 4 prove indipendenti in ciascuna delle quali si ottiene testa con probabilità $\frac{11}{20}$, calcolata in a). Dunque la probabilità di avere (esattamente) 3 teste in 4 lanci è, con la legge binomiale,

$$\binom{4}{3}\Big(\frac{11}{20}\Big)^3\frac{9}{20}=\frac{4\cdot 11^3\cdot 9}{20^4}=0.299\ .$$

Esercizio 3. a) Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X-Y\geq 5)=&\sum_{x,y\,:\,x-y\geq 5}p_{X,Y}(x,y)=\sum_{x,y\,:\,x-y\geq 5}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda}1\!\!1_{x\geq 1}\big(\gamma 1\!\!1_{y=x}+(1-\gamma)1\!\!1_{y=-x}\big)\\ =&e^{-\lambda}\sum_{x\geq 1}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\sum_{y\,:\,y\leq x-5}\big(\gamma 1\!\!1_{y=x}+(1-\gamma)1\!\!1_{y=-x}\big)\end{aligned}$$

Ora, perché la somma interna abbia termini significativi (=non nulli), cerchiamo le $x\geq 1$ tali che $x\leq x-5$ oppure $-x\leq x-5$. La prima disuguaglianza dà l'insieme vuoto mentre la seconda dà $x\geq 5/2$. La condizione $x\geq 1$ e $x\in\mathbb{Z}$ dà alla fine $x\geq 2$. Allora, rimane:

$$\mathbb{P}(X-Y\geq 5)=e^{-\lambda}\sum_{x\geq 2}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}(1-\gamma)$$

ed usando il cambio di variabile $n=x-1$ otteniamo

$$\mathbb{P}(X-Y\geq 5)=(1-\gamma)e^{-\lambda}\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda^n}{n!}=(1-\gamma)e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)=(1-\gamma)(1-e^{-\lambda}).$$

Lavoriamo ora su $\mathbb{E}(Y(X-1))$. Per cominciare, verifichiamo che tale media esiste davvero. Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{x,y}|y(x-1)|p_{X,Y}(x,y)&=\sum_{x}|x-1|\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda}1\!\!1_{x\geq 1}\sum_{y}|y|\big(\gamma 1\!\!1_{y=x}+(1-\gamma)1\!\!1_{y=-x}\big)\\ &=\sum_{x\geq 1}(x-1)\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda}|x|\big[\gamma+(1-\gamma)\big]\\ &=e^{-\lambda}\sum_{x\geq 1}x(x-1)\frac{\lambda^{x-1}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x\geq 2}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-2)!}\end{aligned}$$

e l'ultima somma a destra converge. Quindi la media esiste. Calcoliamola:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y(X-1))&=\sum_{x,y}y(x-1)p_{X,Y}(x,y)=\sum_{x}(x-1)\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda}1\!\!1_{x\geq 1}\sum_{y}y\big(\gamma 1\!\!1_{y=x}+(1-\gamma)1\!\!1_{y=-x}\big)\\ &=\sum_{x\geq 1}(x-1)\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda}\big[\gamma x-(1-\gamma)x\big]\\ &=[\gamma-(1-\gamma)]e^{-\lambda}\sum_{x\geq 1}x(x-1)\frac{\lambda^{x-1}}{x!}e^{-\lambda}\\ &=(2\gamma-1)\sum_{x\geq 1}(x-1)\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda}\end{aligned}$$

Usando il cambio di variabile $n = x - 1$, otteniamo

$$\mathbb{E}(Y(X-1)) = (2\gamma - 1)\sum_{n\geq 0} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

e nell'ultima sommatoria riconosciamo la media della legge $\mathrm{Po}(\lambda)$, che è λ. Dunque,

$$\mathbb{E}(Y(X-1)) = (2\gamma - 1)\lambda.$$

b) Osserviamo che $\mathbb{P}(X \neq 0) = 1$ – basta fare i conti oppure osservare che la densità congiunta di X e Y è non nulla solo quando $x \geq 1$ (il che peraltro assicura che $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1$). Calcoliamo la densità di (X, U). Ovviamente $p_{X,U}(0, u) = 0$. Se invece $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} p_{X,U}(x,u) &= \mathbb{P}(X = x, U = u) = \mathbb{P}\Big(X = x, \frac{X+2Y}{X} = u\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(X = x, \frac{x+2Y}{x} = u\Big) = \mathbb{P}\Big(X = x, Y = \frac{x(u-1)}{2}\Big) \\ &= \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda}1\!\!1_{x\geq 1}\big(\gamma 1\!\!1_{\frac{x(u-1)}{2}=x} + (1-\gamma)1\!\!1_{\frac{x(u-1)}{2}=-x}\big) \end{aligned}$$

Ora, per $x \neq 0$, $\frac{x(u-1)}{2} = x$ se e solo se $u = 3$ e $\frac{x(u-1)}{2} = -x$ se e solo se $u = -1$, quindi

$$p_{X,U}(x,u) = \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda}1\!\!1_{x\geq 1}\big(\gamma 1\!\!1_{u=3} + (1-\gamma)1\!\!1_{u=-1}\big).$$

Abbiamo quindi ottenuto la densità congiunta come il prodotto di una funzione che dipende dalla sola x e di una funzione che dipende dalla sola u, dunque $X \perp\!\!\!\perp U$. E si vede facilmente che

$$p_X(x) = \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda}1\!\!1_{x\geq 1} \quad \text{e} \quad p_U(u) = \gamma 1\!\!1_{u=3} + (1-\gamma)1\!\!1_{u=-1}.$$

Quindi U è una v.a. che può assumere solo i valori 3 e -1, il primo con probabilità γ ed il secondo con probabilità $1 - \gamma$. Per X, si vede facilmente il legame con la legge $\mathbb{P}(\lambda)$: $X = Z + 1$, dove $Z \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.

c) Poiché $X \perp\!\!\!\perp U$ si ha $\mathbb{E}(XU^2) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(U^2)$. Ora, $X = Z + 1$ con $Z \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, quindi $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) + 1 = \lambda + 1$. Inoltre, $\mathbb{E}(U^2) = 9 \cdot \gamma + 1 \cdot (1-\gamma) = 8\gamma + 1$. Allora, $\mathbb{E}(XU^2) = 2$ se e solo se $(\lambda + 1)(8\gamma + 1) = 2$, cioè

$$\gamma = \frac{1-\lambda}{8(1+\lambda)}.$$

Osserviamo che $\gamma \in (0, 1)$ se e solo se $\lambda < 1$. Quindi, se $\lambda < 1$ allora γ dev'essere come sopra. Se invece $\lambda \geq 1$, il valore richiesto per γ non esiste.

Esercizio 4. Poniamo $Z = X + Y$. Sia y tale che $p_Y(y) > 0$. Per ogni z, si ha

$$\begin{aligned} p_{Z|Y}(z \mid y) &= \frac{p_{Z,Y}(z,y)}{p_Y(y)} = \frac{\mathbb{P}(Z = z, Y = y)}{p_Y(y)} = \frac{\mathbb{P}(X + Y = z, Y = y)}{p_Y(y)} = \frac{\mathbb{P}(X = z - y, Y = y)}{p_Y(y)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = z - y)\mathbb{P}(Y = y)}{p_Y(y)} = p_X(z - y). \end{aligned}$$

Allora,

$$\sum_z |z| p_{Z|Y}(z \mid y) = \sum_z |z| p_X(z - y)$$

ed usando il cambio di variabile $x = z - y$, otteniamo

$$\sum_z |z| p_{Z|Y}(z \mid y) = \sum_x |x + y| p_X(x) \leq \sum_x |x| p_X(x) + |y| < \infty$$

perché X ha media. Dunque possiamo effettivamente calcolare $\mathbb{E}(X + Y \mid Y = y)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X + Y \mid Y = y) &= \mathbb{E}(Z \mid Y = y) = \sum_z z p_{Z|Y}(z \mid y) \\
&= \sum_z z p_X(z - y) = \sum_x (x + y) p_X(x) = \sum_x x p_X(x) + y \\
&= \mathbb{E}(X) + y,
\end{aligned}$$

dove abbiamo nuovamente usato il cambio di variabile $x = z - y$.