Prova scritta di Probabilità e Statistica
Appello unico, III sessione, a.a. 2015/2016
27 Febbraio 2017

Esercizio 1. Due urne, A e B, contengono 10 monete. In particolare: A contiene 1 moneta difettosa e 9 eque; B contiene 2 monete difettose e 8 eque.
2 monete vengono estratte senza reinserimento da una delle due urne. Qual è la probabilità che ve ne sia almeno una difettosa sapendo che: (a) l'urna scelta è la A; (b) l'urna scelta è la B; (c) l'urna è scelta a caso tra A e B.

Esercizio 2. Siano X e Y due v.a. discrete, a valori in $E_X = \{-1, 0, +1\}$ e $E_Y = \{-1, +1\}$ rispettivamente, con densità discreta congiunta p_{XY} descritta dalla seguente tabella:

	$X = -1$	$X = 0$	$X = +1$	
$Y = -1$	1/4	1/8	α	
$Y = +1$	1/8	1/8	1/4	

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare α e scrivere le densità discrete marginali p_X e p_Y. X e Y sono indipendenti?

(b) Calcolare media e varianza di XY.

(c) Siano (X_n, Y_n), $n = 1, 2, \dots$, v.a. i.i.d. tutte con la stessa legge di (X, Y). Determinare x affinché $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sum_{k=1}^{n}(4X_kY_k - 1) > x\sqrt{11n}) = 0.85$.

Esercizio 3. Un componente elettronico ha un tempo di vita S che segue una legge $\mathrm{Exp}(\mu)$, $\mu > 0$. Un secondo componente è composto da due elementi, indipendenti tra loro e con il primo componente, posti in serie, con tempi di vita che seguono una legge $\mathrm{Exp}(\alpha\mu)$, $\alpha > 0$.

a) Qual è la densità del tempo di vita T del secondo componente?

b) Qual è la probabilità che il primo componente duri più a lungo del secondo? Quanto deve valere α affinché tale probabilità sia maggiore di $\frac{1}{2}$?

c) Supponiamo che $\alpha = \alpha_n > 0$, con $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \bar{\alpha} \geq 0$ (il caso limite $\bar{\alpha} = +\infty$ è incluso). In tal caso la legge di T dipende anch'essa da n, dunque scriveremo T_n al posto di T. Studiare la convergenza in legge della successione $\{T_n\}_n$.

Esercizio 4. Sia $\{X_n : n \geq 0\}$ una catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix},$$

per qualche $\alpha \in [0, 1]$.

a) Classificare gli stati della catena, trovare le classi irriducibili e discutere la regolarità.

b) Calcolare, per $\alpha \neq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = 4)$.

c) Calcolare le probabilità di passaggio per $\{1, 3\}$ quando la catena parte da 5 e da 6.

Soluzioni

Esercizio 1. Se "successo"="la moneta è difettosa", si tratta di uno schema successo-insuccesso che si può modellizzare con la distribuzione ipergeometrica (le prove non sono indipendenti!).

Poniamo $A = \{\text{si sceglie l'urna A}\}$, $B = \{\text{si sceglie l'urna B}\}$ e X la v.a. (ipergeometrica) che dà il numero di monete difettose ottenute prendendo 2 monete senza reinserimento da un'urna prefissata. Allora, per $k = 0, 1$,

$$\mathbb{P}(X = k \mid A) = \frac{\binom{1}{k}\binom{9}{2-k}}{\binom{10}{2}}$$

quindi si richiede

$$\mathbb{P}(X \geq 1 \mid A) = 1 - \mathbb{P}(X = 0 \mid A) = 1 - \frac{\binom{1}{0}\binom{9}{2}}{\binom{10}{2}} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

(b) Analogamente ad (a), si ha, per $k = 0, 1, 2$,

$$\mathbb{P}(X = k \mid B) = \frac{\binom{2}{k}\binom{8}{2-k}}{\binom{10}{2}}$$

e si richiede

$$\mathbb{P}(X \geq 1 \mid B) = 1 - \mathbb{P}(X = 0 \mid B) = 1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = 1 - \frac{28}{45} = \frac{17}{45}.$$

(c) Usando la formula delle probabilità totali,

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X \geq 1 \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X \geq 1 \mid B)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{10} + \frac{17}{90} = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}.$$

Esercizio 2. a) Dev'essere $\alpha = p_{XY}(1, -1) \geq 0$ e $\sum_{x,y} p_{XY}(x, y) = 1$, quindi:

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \alpha + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \alpha + \frac{7}{8}$$

da cui segue che $\alpha = \frac{1}{8}$, dunque la tabella diventa:

	$X = -1$	$X = 0$	$X = +1$	
$Y = -1$	1/4	1/8	1/8	
$Y = +1$	1/8	1/8	1/4	

Le densità marginali si possono calcolare facilmente in tabella: per p_X basta sommare sulle colonne e per p_Y sulle righe. Si ottiene quindi

$X=-1$	$X=0$	$X=+1$
$3/8$	$1/4$	$3/8$

e

$Y=-1$	$1/2$
$Y=+1$	$1/2$

X e Y non sono indipendenti: ad esempio, $p_{XY}(-1,-1) = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = p_X(-1)p_Y(-1)$.

b) Si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x,y} xy p_{X,Y}(x,y) \\
&= +1 \cdot (p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(-1,-1)) - 1 \cdot (p_{X,Y}(1,-1) + p_{X,Y}(-1,1)) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}; \\
\mathrm{Var}(XY) &= \mathbb{E}((XY)^2) - \mathbb{E}(XY)^2 = \sum_{x,y} x^2y^2 p_{X,Y}(x,y) - \frac{1}{16} = \sum_{x,y\in\{\pm1\}} p_{X,Y}(x,y) - \frac{1}{16} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}.
\end{aligned}$$

c) Le v.a. $4X_nY_n$, $n = 1,2,\ldots$, sono i.i.d. di media e varianza

$$m = \mathbb{E}(4XY) = 4\mathbb{E}(XY) = 1 \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}(4XY) = 16\mathrm{Var}(XY) = 11.$$

Quindi,

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^n (4X_kY_k - 1) > x\sqrt{11n}\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{k=1}^n (4X_kY_k - m)}{\sqrt{n\sigma^2}} > x\Big)$$

ed usando il TLC otteniamo

$$0.85 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^n (4X_kY_k - 1) > x\sqrt{11n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{k=1}^n (4X_kY_k - m)}{\sqrt{n\sigma^2}} > x\Big) = 1 - \Phi(x),$$

dove Φ è la f.r. della legge $N(0,1)$. Otteniamo

$$1 - \Phi(x) = 0.85, \quad \text{cioè} \quad \Phi(-x) = 0.85.$$

Le tavole danno $-x \simeq 1.04$ e quindi $x \simeq -1.04$.

Esercizio 3. Indichiamo con T_1 e T_2 i tempi di vita dei due elementi che determinano il secondo componente. Allora, $S \sim \mathrm{Exp}(\mu)$, $T_1, T_2 \sim \mathrm{Exp}(\alpha\mu)$ e $T = \min(T_1, T_2)$. Inoltre, sappiamo che S, T_1, T_2 sono indipendenti, dunque anche S e T sono indipendenti.

a) Calcoliamo la funzione di distribuzione di T: poiché $T_1 \perp\!\!\!\perp T_2$, per $t > 0$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= \mathbb{P}(T \le t) = 1 - \mathbb{P}(T > t) = 1 - \mathbb{P}(\min(T_1,T_2) > t) = 1 - \mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T_1 > t)\mathbb{P}(T_2 > t) = 1 - (e^{-\alpha\mu t})^2 = 1 - e^{-2\alpha\mu t}.
\end{aligned}$$

Dunque, $T \sim \mathrm{Exp}(2\alpha\mu)$ e la densità di probabilità di T è

$$f_T(t) = 2\alpha\mu e^{-2\alpha\mu t} \mathbb{1}_{t>0}.$$

b) La probabilità richiesta è $\mathbb{P}(S > T)$. Poiché, come già osservato, $S \perp\!\!\!\perp T$, la densità congiunta di S e T esiste ed è data da

$$f_{S,T}(s,t) = f_S(s) f_T(t) = \mu e^{-\mu s} 1\!\!1_{s>0} \times 2\alpha\mu e^{-2\alpha\mu t} 1\!\!1_{t>0}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S > T) &= \int_{\{(s,t)\,:\,s>t\}} f_{S,T}(s,t) ds dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_t^{+\infty} ds \mu e^{-\mu s} 1\!\!1_{s>0} \times 2\alpha\mu e^{-2\alpha\mu t} 1\!\!1_{t>0} \\
&= \int_0^{+\infty} 2\alpha\mu e^{-2\alpha\mu t} dt \underbrace{\int_t^{+\infty} \mu e^{-\mu s}\, ds}_{=e^{-\mu t}} = \int_0^{+\infty} 2\alpha\mu e^{-(2\alpha+1)\mu t} dt \\
&= \frac{2\alpha}{2\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Inoltre, $\frac{2\alpha}{2\alpha+1} > \frac{1}{2}$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.
c) Usiamo il metodo della funzione caratteristica. Poiché $T_n \sim \mathrm{Exp}(2\alpha_n\mu)$, si ha

$$\varphi_{T_n}(\vartheta) = \frac{2\alpha_n\mu}{2\alpha_n\mu - i\vartheta}.$$

Dividiamo in tre casi:

1. $\alpha_n \to 0$: in tal caso, $\varphi_{T_n}(\vartheta) \to 0 =: \varphi_0(\vartheta)$ e $\varphi_0 \equiv 0$ non è una funzione caratteristica: $\{T_n\}_n$ non converge in legge;

2. $\alpha_n \to \bar{\alpha} \in (0, +\infty)$: in tal caso, $\varphi_{T_n}(\vartheta) \to \frac{2\bar{\alpha}\mu}{2\bar{\alpha}\mu - i\vartheta} =: \varphi_{\bar{\alpha}}(\vartheta)$ e $\varphi_{\bar{\alpha}}$ è la funzione caratteristica della legge $\mathrm{Exp}(\bar{\alpha}\mu)$: $T_n \to \bar{T}$ in legge, con $\bar{T} \sim \mathrm{Exp}(\bar{\alpha}\mu)$;

3. $\alpha_n \to +\infty$: in tal caso, $\varphi_{T_n}(\vartheta) \to 1 =: \varphi_\infty(\vartheta)$ e $\varphi_\infty \equiv 1$ è la funzione caratteristica della v.a. identicamente nulla: $T_n \to 0$ in legge.

Esercizio 4. a) La catena non è irriducibile (gli stati 5 e 6 sono transitori perché ciascuno di loro comunica con 1 ma non vale il viceversa) e quindi non è regolare. Dividiamo ora la discussione nei casi $\alpha = 1$ e $\alpha < 1$.
Caso $\alpha = 1$. Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix};$$

quindi 1 e 2 sono ricorrenti perché sono assorbenti, e l'insieme degli stati transitori è $T = \{3, 4, 5, 6\}$ (infatti ciascuno degli stati 3, 5 e 6 comunica con 1 ma non vale il viceversa, mentre lo stato 4 comunica con 2 ma non vale il viceversa). In conclusione abbiamo due classi chiuse e irriducibili $C_1 = \{1\}$ e $C_2 = \{2\}$.
Caso $\alpha \neq 1$. In questo caso abbiamo le due seguenti classi chiuse irriducibili: $C_1 = \{1, 3\}$ e $C_2 = \{2, 4\}$. Inoltre l'insieme degli stati transitori è $T = \{5, 6\}$ per quanto detto sopra all'inizio della risposta a questa domanda.

b) Sia $\alpha \neq 1$. Se $X_0 = 4$, la catena rimane sempre negli stati $\{2, 4\}$. La sottocatena che si viene a formare ha matrice di transizione

$$Q = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 4 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \quad 2 \qquad 4 \\ \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Osserviamo che questa sottocatena è irriducibile ($\alpha \neq 1$ e quindi tutti gli stati comunicano tra di loro) ed essendo, ad esempio, $p_{44} = \frac{2}{3} > 0$, è anche regolare. Quindi, per il teorema di Markov, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = 4) = p$, dove (p, q) denota l'unica distribuzione invariante per Q. Determiniamo p e q. Dev'essere $(p, q)Q = (p, q)$, con $p, q \geq 0$ e $p + q$=1. Il sistema diventa

$$\alpha p + \frac{1}{3}\, q = p,$$

da cui $p = \frac{1}{3(1-\alpha)} q$. La condizione $p + q = 1$ dà infine

$$p = \frac{1}{4 - 3\alpha} \quad \text{e} \quad q = \frac{3(1-\alpha)}{4 - 3\alpha}.$$

Quindi,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = 4) = \frac{1}{4 - 3\alpha}.$$

c) Siamo interessati alle probabilità di passaggio per l'insieme $C = \{1, 3\}$. L'insieme degli stati non appartenenti a C e che comunicano con C è $D_C = \{5, 6\}$. Quindi, se indichiamo con λ_k la probabilità di passaggio per C partendo da $k \in D_C$, abbiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{\lambda_5}{5} \\ \lambda_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{\lambda_5}{6} + \frac{\lambda_6}{6}. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$\frac{4}{5}\lambda_5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}, \text{ e quindi } \lambda_5 = \frac{5}{4} \cdot \frac{1+1}{5} = \frac{1}{2}.$$

Sostituendo nella seconda equazione, si ha

$$\frac{5}{6}\lambda_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}, \text{ e quindi } \lambda_6 = \frac{6}{5} \cdot \frac{2+2+1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Nota: i valori numerici $\lambda_5 = \lambda_6 = \frac{1}{2}$ non sono sorprendenti se si osserva che, per $i \in \{5, 6\}$, si ha $p_{i1} + p_{i3} = p_{i2} + p_{i4}$.