

Esercizio 1. Un dado equilibrato viene lanciato ripetutamente. Indichiamo con X_n il risultato dell' n -esimo lancio.

- a) Calcolare la distribuzione congiunta di $X = X_1$ e $Z = \mathbb{1}_{\{X_1 + X_2 \text{ pari}\}}$. Si tratta di una legge nota? X e Z sono indipendenti? Calcolare $\mathbb{E}(XZ)$.
- b) Per $n \geq 1$, sia $Z_n = \mathbb{1}_{\{X_{2n-1} + X_{2n} \text{ pari}\}}$. Trovare n affinché $\mathbb{P}(4 \sum_{k=1}^n Z_k > 3n) \leq 0.1$.

Esercizio 2. Siano X ed Y v.a. indipendenti di legge esponenziale di parametro 1.

- a) Calcolare la legge congiunta e le leggi marginali di $(U, V) = (X, X + Y)$.
- b) Sia $\{V_n\}_n$ una successione di copie indipendenti di V . Calcolare $\gamma \in \mathbb{R}$ affinché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n V_k > 2n + \gamma\sqrt{n}\right) = 0.75.$$

Esercizio 3. Sia $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ una v.a. gaussiana su $\mathbb{R}^3$ di media nulla e matrice di covarianza

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcolare la legge di $Y = Z_1 + 2Z_2 - Z_3$.
- b) Sia $\{Y_n\}_n$ una successione di v.a. tutte con la stessa legge di Y e sia $\{a_n\}_n \subset \mathbb{R}$ una successione a termini positivi tale che esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (il caso di successione divergente è ammesso). Studiare la convergenza in legge di $\{X_n\}_n$, dove $X_n = a_n Y_n^2$. Identificare la legge limite, qualora esista.

Esercizio 4. Sia $\{X_n : n \geq 0\}$ una catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha^2 & 0 & \alpha^2/2 & \alpha^2/2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

- a) Classificare gli stati della catena e trovare le classi irriducibili. Determinare l'insieme A dei valori di α per cui la catena è regolare.
- b) Trovare, se esistono, $\alpha \in A$ e $i \in E$ tali che $5 \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i1}^{(n)} = 8 \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i4}^{(n)}$.
- c) Trovare, se esiste, $\alpha \in [0, 1]$ tale che $\mathbb{P}(X_1 = 3) = \frac{5}{16}$ quando la distribuzione iniziale è quella uniforme.
- d) Per $\alpha \neq 1$, calcolare il tempo medio di primo passaggio nello stato 2 partendo dallo stato 1.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Possiamo assumere che i lanci siano indipendenti, e quindi le v.a. $X_1, X_2, \dots$ sono indipendenti.

a) X assume valori in $\{1, \dots, 6\}$ e Z in $\{0, 1\}$. Per $z = 0$ e $x \in \{1, \dots, 6\}$, si ha

$$p_{X,Z}(x, 0) = \mathbb{P}(X = x, Z = 0) = \mathbb{P}(X_1 = x, X_1 + X_2 \text{ dispari}).$$

Ora, se x è pari,

$$p_{X,Z}(x, 0) = \mathbb{P}(X_1 = x, X_2 \text{ dispari}) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_2 \text{ dispari}) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12};$$

analogamente, se x è dispari,

$$p_{X,Z}(x, 0) = \mathbb{P}(X_1 = x, X_2 \text{ pari}) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_2 \text{ pari}) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}.$$

Se invece $z = 1$,

$$p_{X,Z}(x, 1) = \mathbb{P}(X = x, Z = 1) = \mathbb{P}(X = x) - \mathbb{P}(X = x, Z = 0) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

Quindi,

$$p_{X,Z}(x, z) = \frac{1}{12} \mathbb{1}_{x \in \{1, \dots, 6\}, z \in \{0, 1\}},$$

cioè (X, Z) ha legge uniforme su $\{1, \dots, 6\} \times \{0, 1\}$. In particolare,

$$p_{X,Z}(x, z) = \frac{1}{6} \mathbb{1}_{x \in \{1, \dots, 6\}} \times \frac{1}{2} \mathbb{1}_{z \in \{0, 1\}},$$

quindi $X \perp\!\!\!\perp Z$, $X \sim \text{Un}\{1, \dots, 6\}$ e $Z \sim \text{Un}\{0, 1\} \equiv \text{Be}(\frac{1}{2})$. E si ha

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) = \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4}.$$

b) Poiché le X_i sono i.i.d., le coppie $(X_1, X_2), (X_3, X_4), \dots (X_{2n-1}, X_{2n})$ sono i.i.d. Quindi, $X_1 + X_2, \dots, X_{2n-1} + X_{2n}$ rimangono i.i.d. e $Z_1, \dots, Z_n$ sono i.i.d., con $\mathbb{E}(Z_i) = \frac{1}{2}$. Allora, usando la disuguaglianza di Chebyshev, otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(4 \sum_{k=1}^n Z_k > 3n\right) &= \mathbb{P}\left(4 \sum_{k=1}^n Z_k - 2n > 3n - 2n\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|4 \sum_{k=1}^n Z_k - 2n\right| > n\right) \\ &\leq \frac{\text{Var}(4 \sum_{k=1}^n Z_k)}{n^2}. \end{aligned}$$

Ora, le Z_k sono i.i.d. con $\text{Var}(Z_k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, quindi $\text{Var}(4 \sum_{k=1}^n Z_k) = 16 \sum_{k=1}^n \text{Var}(Z_k) = 4n$, da cui segue che

$$\mathbb{P}\left(4 \sum_{k=1}^n Z_k > 3n\right) \leq \frac{4}{n}.$$

Allora, per avere $\mathbb{P}(4 \sum_{k=1}^n Z_k > 3n) \leq 0.1$ basta che $\frac{4}{n} \leq 0.1$, cioè $n \geq 40$.

Esercizio 2. a) Usiamo il TCV: $(U, V) = \phi(X, Y)$, dove $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è data da $\phi(x, y) = (x, x + y)$. ϕ è un diffeomorfismo con inversa $\psi(u, v) = (u, v - u)$ e si ha

$$\det D\psi(u, v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Quindi,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(u, v - u) |\det \psi(u, v)| = e^{-u} \mathbb{1}_{u>0} e^{-(v-u)} \mathbb{1}_{v-u>0} \times 1 = e^{-v} \mathbb{1}_{v>u>0}.$$

Ovviamente $U \sim \text{Exp}(1) = \Gamma(1, 1)$ e, ricordando il legame tra leggi esponenziali e legge gamma, $V \sim \Gamma(2, 1)$. La cosa si può verificare facilmente usando la “saturazione”:

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u, v) dv \quad \text{e} \quad f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u, v) du.$$

b) Osserviamo che

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n V_k > 2n + \gamma\sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^n V_k - 2n}{\sqrt{n}} > \gamma\right).$$

Ora, Poiché $V \sim \Gamma(2, 1)$ o anche $V = X + Y$ con $X \perp\!\!\!\perp Y$ e $X, Y \sim \text{Exp}(1)$, si ha $\mu := \mathbb{E}(V) = 2$ e $\sigma^2 := \text{Var}(V) = 2$. Quindi,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n V_k > 2n + \gamma\sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^n V_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} > \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right).$$

Ci troviamo nella situazione del TLC, che dà:

$$0.75 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n V_k > 2n + \gamma\sqrt{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^n V_k - n\mathbb{E}(V)}{\sqrt{n\text{Var}(V)}} > \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right),$$

cioè

$$\Phi\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) = 0.25.$$

Posto ϕ_a il quantile della normale standard associato ad a , otteniamo

$$\frac{\gamma}{\sqrt{2}} = \phi_{0.25} = -\phi_{0.75},$$

cioè

$$\gamma = -\sqrt{2} \phi_{0.75}.$$

Le tavole danno $\phi_{0.75} = 0.68$, dunque $\gamma = -0.96$.

Esercizio 3. a) Poiché Y è una trasformazione lineare di Z , sappiamo che Y ha legge gaussiana su $\mathbb{R}$. Calcoliamo media e varianza:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(Z_1 + 2Z_2 - Z_3) = \mathbb{E}(Z_1) + 2\mathbb{E}(Z_2) - \mathbb{E}(Z_3) = 0, \\ \text{Var}(Y) &= \text{Var}(Z_1 + 2Z_2 - Z_3) \\ &= \text{Var}(Z_1) + \text{Var}(2Z_2) + \text{Var}(Z_3) + 2\text{Cov}(Z_1, 2Z_2) - 2\text{Cov}(Z_1, Z_3) - 2\text{Cov}(2Z_2, Z_3) \\ &= \text{Var}(Z_1) + 4\text{Var}(Z_2) + \text{Var}(Z_3) + 4\text{Cov}(Z_1, Z_2) - 2\text{Cov}(Z_1, Z_3) - 4\text{Cov}(Z_2, Z_3) \\ &= 1 + 16 + 3 - 8 = 12. \end{aligned}$$

Quindi $Y \sim N(0, 12)$.

b) Poniamo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in [0, +\infty]$ ($a = +\infty$ denota il caso di successione divergente). Notiamo che la legge di $a_n Y_n$ è, per ogni n , uguale alla legge di $a_n Y$, quindi è evidente che $a_n Y \rightarrow aY$ per $n \rightarrow \infty$, in legge. Ovviamente, il caso $a = +\infty$ va trattato a parte, ma l'idea è che, potendo Y assumere tutti i valori di $\mathbb{R}$, aY assumerebbe solo i valori $\pm\infty$, quindi non ci sarebbe convergenza in legge. Procediamo ora in maniera formale, usando il metodo della funzione di ripartizione. Indichiamo

$$F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(a_n Y_n^2 \leq x) = \mathbb{P}(a_n Y^2 \leq x).$$

Ricordando che $a_n > 0$ per ogni n , si ha $F_n(x) = 0$ quando $x \leq 0$. Se invece $x > 0$,

$$F_n(x) = \mathbb{P}(a_n Y^2 \leq x) = \mathbb{P}\left(Y^2 \leq \frac{x}{a_n}\right) = \mathbb{P}\left(|Y| \leq \sqrt{\frac{x}{a_n}}\right).$$

Ricapitolando,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \mathbb{P}\left(|Y| \leq \sqrt{\frac{x}{a_n}}\right) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Il comportamento asintotico di F_n dipende chiaramente da $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Dividiamo in tre casi.

Caso $a = 0$: poiché, per $x > 0$, $\frac{x}{a_n} \rightarrow +\infty$, si ha $\mathbb{P}\left(|Y| \leq \sqrt{\frac{x}{a_n}}\right) \rightarrow \mathbb{P}\left(|Y| < +\infty\right) = 1$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Osserviamo che G è la f.r. della v.a. $X = 0$, quindi in questo caso $X_n \rightarrow 0$ in legge.

Caso $a \in (0, +\infty)$: poiché, per $x > 0$, $\frac{x}{a_n} \rightarrow \frac{x}{a}$ e poiché la f.r. di Y è continua, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \mathbb{P}\left(|Y| \leq \sqrt{\frac{x}{a}}\right) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Ora, procedendo come prima ma “a ritroso”, si vede subito che G è la f.r. della v.a. $X = aY^2$, da cui otteniamo che la successione converge in legge ad una v.a. che ha la stessa legge di aY . Identifichiamo la legge di aY : denotando con f_{aY} la sua densità, si ha

$$f_{aY}(x) = \mathbb{1}_{x>0} \frac{d}{dx} \mathbb{P}\left(|Y| \leq \sqrt{\frac{x}{a}}\right).$$

Indicando con Φ e ϕ rispettivamente la f.r. e la densità di una gaussiana standard, usando le sue proprietà e ricordando che $Y = \sqrt{12}W$ con $W \sim N(0, 1)$, otteniamo

$$\mathbb{P}(|Y| \leq y) = \mathbb{P}(|\sqrt{12}W| \leq y) = \mathbb{P}(|W| \leq y/\sqrt{12}) = 2\Phi(y/\sqrt{12}) - 1,$$

quindi

$$\begin{aligned} f_{aY}(x) &= \mathbb{1}_{x>0} \frac{d}{dx} \left(2\Phi\left(|Y| \leq \sqrt{\frac{x}{12a}}\right) - 1 \right) = 2\phi\left(\sqrt{\frac{x}{12a}}\right) \frac{1}{2\sqrt{12xa}} \mathbb{1}_{x>0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{24\pi a}} x^{-1/2} e^{-\frac{x}{24a}} \mathbb{1}_{x>0} = \frac{1}{\sqrt{24\pi a}} x^{1/2-1} e^{-\frac{1}{24a}x} \mathbb{1}_{x>0}. \end{aligned}$$

Modulo la costante, riconosciamo la densità $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{24a})$. E la costante è corretta perché $\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2})$ e quindi

$$f_{aY}(x) = \frac{(\frac{1}{24a})^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{1/2-1} e^{-\frac{1}{24a}x} \mathbb{1}_{x>0}.$$

Dunque, la legge limite esiste ed è una legge $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{24a})$.

Caso $a + \infty$: poiché $\frac{x}{a_n} \rightarrow 0$, si ha $\mathbb{P}\left(|Y| \leq \sqrt{\frac{x}{a_n}}\right) \rightarrow \mathbb{P}\left(|Y| \leq 0\right) = 0$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x) := 0.$$

Osserviamo che G è continua e non è una f.r.: in questo caso non c'è convergenza in legge.

Esercizio 4. a) Studiamo prima i casi limite $\alpha \in \{0, 1\}$.

Caso $\alpha = 0$. Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

quindi la catena è irriducibile perché tutti gli stati comunicano tra loro e si ha un'unica classe chiusa irriducibile $\{1, 2, 3, 4\}$. Notiamo che, partendo da un qualsiasi stato, dopo 4 passi la catena ritorna nella posizione iniziale. Tradotto in matematica, dopo 4 potenze di P torna P :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^5 = P.$$

Dunque, la catena non è regolare: $0 \notin A$.

Caso $\alpha = 1$. Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

quindi 1, 2 e 3 sono ricorrenti perché sono assorbenti, e 4 è transitorio perché comunica con 3 ma non vale il viceversa: abbiamo tre classi chiuse irriducibili $\{1\}, \{2\}, \{3\}$. Ovviamente la catena non può essere regolare perché non è irriducibile, quindi $1 \notin A$.

Vediamo ora il caso generale $\alpha \in (0, 1)$. La matrice di transizione P è del tipo

$$P = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

dove $*$ indica un elemento positivo; quindi la catena è irriducibile perché tutti gli stati comunicano tra loro e si ha un'unica classe chiusa irriducibile $\{1, 2, 3, 4\}$. In questo caso la catena è regolare perché la catena è irriducibile ed esiste un elemento positivo sulla diagonale principale (qui la diagonale è a termini tutti positivi!). Ne deduciamo che

$$A = (0, 1).$$

b) Dal Teorema di Markov (catena a stati finiti e regolare), per $\alpha \in A = (0, 1)$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ per ogni $i, j \in E$, dove $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ è l'unica distribuzione stazionaria; quindi si cerca il valore di α per cui si ha $\pi_1 = \frac{8}{5}\pi_4$.

Calcoliamo π :

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha^2 & 0 & \alpha^2/2 & \alpha^2/2 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4).$$

La prima equazione di tale sistema è

$$\alpha\pi_1 + (1-\alpha^2)\pi_4 = \pi_1$$

da cui segue

$$(1-\alpha^2)\pi_4 = (1-\alpha)\pi_1, \quad (1+\alpha)\pi_4 = \pi_1.$$

Allora si deve avere $1+\alpha = \frac{8}{5}$, da cui segue $\alpha = \frac{3}{5}$.

c) Per ipotesi, la distribuzione iniziale è $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Posto $p_i = \mathbb{P}(X_1 = i)$ per ogni $i \in E$, si ha

$$(1/4, 1/4, 1/4, 1/4) \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha^2 & 0 & \alpha^2/2 & \alpha^2/2 \end{pmatrix} = (p_1, p_2, p_3, p_4).$$

Imponendo $p_3 = \frac{5}{16}$ si ottiene

$$\frac{1-\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{8} = \frac{5}{16},$$

da cui segue

$$\frac{2+\alpha^2}{8} = \frac{5}{16}, \quad \alpha^2 + 2 = \frac{40}{16}, \quad \alpha^2 = \frac{40-32}{16} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

d) Sia $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n = 2\}$ e poniamo $\mu_i = \mathbb{E}[\tau | X_0 = i]$ per $i \in \{1, 3, 4\}$. Si chiede μ_1 . La terna μ_1, μ_2, μ_3 è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + p_{11}\mu_1 + p_{13}\mu_3 + p_{14}\mu_4 = 1 + \alpha\mu_1 \\ \mu_3 = 1 + p_{31}\mu_1 + p_{33}\mu_3 + p_{34}\mu_4 = 1 + \alpha\mu_3 + (1-\alpha)\mu_4 \\ \mu_4 = 1 + p_{41}\mu_1 + p_{43}\mu_3 + p_{44}\mu_4 = 1 + (1-\alpha^2)\mu_1 + \frac{\alpha^2}{2}\mu_3 + \frac{\alpha^2}{2}\mu_4. \end{cases}$$

e dalla prima equazione si ottiene subito $\mu_1 = \frac{1}{1-\alpha}$ (che è la media di una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro $1-\alpha$, come deve essere...).

Se però si volessero calcolare anche μ_3 e μ_4 , si isola μ_3 in funzione di μ_4 nella seconda equazione e si sostituiscono le relazioni ottenute dalle prime due equazioni nella terza:

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{1-\alpha} \\ \mu_3 = \frac{1}{1-\alpha} + \mu_4 \\ (1-\frac{\alpha^2}{2})\mu_4 = 1 + (1-\alpha^2) \cdot \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha^2}{2}(\frac{1}{1-\alpha} + \mu_4). \end{cases}$$

A questo punto ci soffermiamo sulla terza equazione e si ha

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right)\mu_4 = 1 + (1+\alpha) + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}, \quad (1-\alpha^2)\mu_4 = 2 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)},$$

da cui segue

$$\mu_4 = \frac{(2 + \alpha)2(1 - \alpha) + \alpha^2}{2(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)} = \frac{4 - 4\alpha + 2\alpha - 2\alpha^2 + \alpha^2}{2(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)} = \frac{4 - 2\alpha - \alpha^2}{2(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)}.$$

Infine, sostituendo il valore ottenuto nella seconda equazione, si ha

$$\mu_3 = \frac{1}{1 - \alpha} + \frac{4 - 2\alpha - \alpha^2}{2(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)} = \frac{2(1 - \alpha^2) + 4 - 2\alpha - \alpha^2}{2(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)} = \frac{6 - 2\alpha - 3\alpha^2}{2(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)}.$$

Ricapitolando si ha

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{1 - \alpha} \\ \mu_3 = \frac{6 - 2\alpha - 3\alpha^2}{2(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)} \\ \mu_4 = \frac{4 - 2\alpha - \alpha^2}{2(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)}. \end{cases}$$