PROVA SCRITTA DI PROBABILITÀ E STATISTICA
I APPELLO, I SESSIONE, A.A. 2015/2016
20 GIUGNO 2016

Esercizio 1. Due urne, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, contengono entrambe 3 palline gialle e 3 palline rosse. Dall'urna $\mathcal{A}$ vengono prese 2 palline (senza rimpiazzo) ed inserite nell'urna $\mathcal{B}$, dando così luogo ad una terza urna $\mathcal{C}$.

a) Determinare tutte le possibili composizioni di $\mathcal{C}$ e con quale probabilità si possono verificare.

Dall'urna $\mathcal{C}$ vengono estratte due palline con rimpiazzo.

b) Qual è la probabilità che almeno una sia gialla?

c) Se è noto che è uscita almeno una pallina gialla, qual è la probabilità che dall'urna $\mathcal{A}$ non sia stata estratta alcuna pallina gialla?

d) Gli eventi "alla i-esima estrazione esce una pallina gialla", $i = 1, 2$, sono indipendenti?

Esercizio 2. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità

$$p_{X,Y}(x, y) = c\,\frac{(1 - e^{-1})^x}{(y - x)!}\,\mathbb{1}_{y \geq x \geq 0}, \quad x, y \text{ interi.}$$

a) Calcolare c e la densità discreta di X.

b) Calcolare $\mathbb{P}(3Y = 2X \mid X \text{ pari})$.

c) Calcolare la media condizionale di Y dato che $X = x$, per tutti i valori di x per i quali ha senso (da determinare esplicitamente).

Esercizio 3. Sia (X, Y) una variabile aleatoria in $\mathbb{R}^2$

a) discreta,

b) assolutamente continua.

Supponiamo che X e Y siano indipendenti, centrate (media 0, varianza 1), di densità (discreta nel caso **a)** e continua nel caso **b)**) rispettivamente p_X e p_Y. Per $\lambda \in [0, 1]$, poniamo

$$Z_\lambda = \lambda X + (1 - \lambda)Y \quad \text{e} \quad p_\lambda = \lambda p_X + (1 - \lambda)p_Y.$$

Verificare che p_λ è sempre una densità e dire se Z_λ ha densità p_λ (mai, qualche volta, sempre).

Esercizio 4. Sia (X, Y) una v.a. in $\mathbb{R}^2$ assolutamente continua con densità

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{(\ln x - y)^{n-1}}{x^2} \mathbb{1}_{x > e^y > 1},$$

dove $n \in \mathbb{N}$ è un parametro fissato.

a) Calcolare la densità di probabilità di $(U, V) = (\ln X - Y, Y)$ e le relative densità marginali.

Poiché la legge di U dipende dalla scelta di n, scriviamo U_n in luogo di U.

b) Dimostrare che $\frac{1}{n} U_n \to 1$ in probabilità.

c) Posto $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} U_n - \sqrt{n}$, studiare la convergenza in legge di $\{Z_n\}_n$.

Esercizio 5. Sia $\{X_n : n \geq 0\}$ una catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ (1-\alpha)/2 & \alpha & (1-\alpha)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

dove $\alpha \in [0, 1]$ è un parametro fissato.

a) Classificare gli stati della catena, trovare le classi irriducibili e le distribuzioni stazionarie.

b) Supponiamo che $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 2) = 1/2$. Trovare la distribuzione di X_1.

c) Supponiamo che $\mathbb{P}(X_0 \in \{3, 4\}) = 1$. Calcolare $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n]$.

d) Supponiamo che $\alpha = 0$. Calcolare il tempo medio di passaggio per $\{3, 4\}$ partendo dallo stato 1.

Soluzioni

Esercizio 1. **a)** Indichiamo con N il numero di palline gialle estratte da $\mathcal{A}$ in seguito a 2 estrazioni senza rimpiazzo. N ha distribuzione ipergeometrica:

$$\mathbb{P}(N=k)=\frac{\binom{3}{k}\binom{3}{2-k}}{\binom{6}{2}}, \quad k=0,1,2.$$

Quindi,

$$\mathbb{P}(N=0)=\frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(N=1)=\frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(N=2)=\frac{1}{5}.$$

Le composizioni dell'urna $\mathcal{C}$ dipendono ovviamente dal valore osservato per N e possono essere quindi 3. In dettaglio:

- l'evento $\{N=0\}$ dà l'urna $\mathcal{C}_1$ composta da 3 gialle e 5 nere, e la probabilità è $\frac{1}{5}$;
- l'evento $\{N=1\}$ dà l'urna $\mathcal{C}_2$ composta da 4 gialle e 4 nere, e la probabilità è $\frac{3}{5}$;
- l'evento $\{N=2\}$ dà l'urna $\mathcal{C}_3$ composta da 5 gialle e 3 nere, e la probabilità è $\frac{1}{5}$.

b) Sia A_i l'evento che corrisponde a "su due estrazioni senza rimpiazzo da $\mathcal{C}$ sono state osservate esattamente i palline gialle", con $i=0,1,2$. Si chiede $\mathbb{P}(A)$ con $A=A_1\cup A_2$ ma è più comodo calcolare $\mathbb{P}(A)$ usando il complementare di A, che è A_0. Calcoliamo dunque $\mathbb{P}(A_0)$. Si ha

$$\mathbb{P}(A_0)=\sum_{N=0}^{k}\mathbb{P}(A_0\mid N=k)\mathbb{P}(N=k).$$

Se è noto che $N=k$, il numero di palline gialle estratte su 2 estrazioni senza rimpiazzo segue una legge binomiale di parametri $n=2$ e $p=(3+k)/8$. Dunque,

$$\mathbb{P}(A_0\mid N=k)=\binom{3}{0}\Big(\frac{3+k}{8}\Big)^0\Big(1-\frac{3+k}{8}\Big)^{2-0}=\Big(\frac{5-k}{8}\Big)^2.$$

Allora,

$$\mathbb{P}(A_0)=\sum_{N=0}^{k}\Big(\frac{5-k}{8}\Big)^2\mathbb{P}(N=k)=\Big(\frac{5}{8}\Big)^2\frac{1}{5}+\Big(\frac{4}{8}\Big)^2\frac{3}{5}+\Big(\frac{3}{8}\Big)^2\frac{1}{5}=\frac{41}{160}$$

e la probabilità richiesta è $\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(A_0)=\frac{19}{160}$.

c) Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=0\mid A)&=\frac{\mathbb{P}(A\mid N=0)\mathbb{P}(N=0)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{(1-\mathbb{P}(A_0\mid N=0))\mathbb{P}(N=0)}{\mathbb{P}(A)}\\&=\frac{(1-(\frac{5}{8})^2)\frac{1}{5}}{\frac{41}{160}}=\frac{39}{82}.\end{aligned}$$

d) Si ha

$$\mathbb{P}(A_1)=\sum_{k=0}^{2}\mathbb{P}(A_1\mid N=k)\mathbb{P}(N=k)=\frac{3}{8}\frac{1}{5}+\frac{4}{8}\frac{3}{5}+\frac{5}{8}\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$$

e, per simmetria, $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$. Poi,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \mid N = k)\mathbb{P}(N = k) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{8}\right)^2 \frac{3}{5} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 \frac{1}{5} = \frac{41}{160}.$$

Poiché $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$, gli eventi in questione non sono indipendenti.

Esercizio 2. a) Dev'essere $p_{X,Y} \geq 0$, il che dà $c \geq 0$, e $\sum_{x,y} p_{X,Y}(x,y) = 1$. Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{x,y} p_{X,Y}(x,y) &= c \sum_{x,y} \frac{(1-e^{-1})^x}{(y-x)!} 1\!\!1_{x\geq 0, y\geq x} = c \sum_{x=0}^{\infty} (1-e^{-1})^x \sum_{y=x}^{\infty} \frac{1}{(y-x)!} \\ &= c \sum_{x=0}^{\infty} (1-e^{-1})^x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}_{=e} = ce \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} (1-e^{-1})^x}_{=\frac{1}{1-(1-e^{-1})}} = ce^2\end{aligned}$$

da cui segue che $c = e^{-2}$. Calcoliamo la densità marginale di X. Si ha

$$\begin{aligned}p_X(x) = \sum_{y} p_{X,Y}(x,y) &= e^{-2} \sum_{y} \frac{(1-e^{-1})^x}{(y-x)!} 1\!\!1_{x\geq 0, y\geq x} = e^{-2} 1\!\!1_{x\geq 0} (1-e^{-1})^x \sum_{y=x}^{\infty} \frac{1}{(y-x)!} \\ &= e^{-2} 1\!\!1_{x\geq 0} (1-e^{-1})^x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}_{=e} = e^{-1}(1-e^{-1})^x \, 1\!\!1_{x\geq 0}\end{aligned}$$

e quindi $X \sim \mathrm{Ge}(e^{-1})$.

b) Si ha

$$\mathbb{P}(3Y = 2X \mid X \text{ pari}) = \frac{\mathbb{P}(3Y = 2X, X \text{ pari})}{\mathbb{P}(X \text{ pari})}.$$

Ora,

$$\mathbb{P}(X \text{ pari}) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = 2n) = e^{-1} \sum_{n\geq 0} (1-e^{-1})^{2n} = e^{-1} \underbrace{\sum_{n\geq 0} \left((1-e^{-1})^2\right)^n}_{=\frac{1}{1-(1-e^{-1})^2}} = \frac{1}{2-e^{-1}}.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(3Y = 2X, X \text{ pari}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(2Y = 3X, X = 2n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(2Y = 6n, X = 2n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = 3n, X = 2n) = e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-e^{-1})^{2n}}{n!} = e^{-2} \exp\left((1-e^{-1})^2\right).\end{aligned}$$

Sostituendo,

$$\mathbb{P}(3Y = 2X \mid X \text{ pari}) = (2-e^{-1})e^{-2} \exp\left((1-e^{-1})^2\right).$$

c) $p_X(x) > 0$ se e solo se $x \geq 0$. Quindi, per $x \geq 0$,

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} = \frac{\frac{e^{-2}(1-e^{-1})^x}{(y-x)!}}{e^{-1}(1-e^{-1})^x} 1\!\!1_{y\geq x} = \frac{e^{-1}}{(y-x)!} 1\!\!1_{y\geq x}.$$

Dunque, Y ha la stessa legge di $Z+x$, dove $Z \sim \mathrm{Po}(1)$, e allora

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z+x) = \mathbb{E}(Z) + x = 1 + x.$$

Esercizio 3 Ovviamente $p_\lambda \geq 0$. Inoltre, per **a)**,

$$\sum_u p_\lambda(u) = \lambda \sum_u p_X(u) + (1-\lambda) \sum_u p_Y(u) = \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

e per **b)**,

$$\int_{\mathbb{R}} p_\lambda(u) du = \lambda \int_{\mathbb{R}} p_X(u) du + (1-\lambda) \int_{\mathbb{R}} p_Y(u) du = \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

dunque p_λ rimane una densità.
Indichiamo ora con U_λ una v.a. di legge p_λ. Calcoliamo media e varianza di Z_λ e di U_λ. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_\lambda) &= \lambda \mathbb{E}(X) + (1-\lambda)\mathbb{E}(Y) = 0 \\
\mathrm{Var}(Z_\lambda) &= \lambda^2 \mathrm{Var}(X) + (1-\lambda)^2 \mathrm{Var}(Y) = \lambda^2 + (1-\lambda)^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.
\end{aligned}$$

Inoltre, nel caso **a)** si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U_\lambda) &= \sum_u u p_\lambda(u) = \lambda \sum_u u p_X(u) + (1-\lambda) \sum_u u p_Y(u) \\
&= \lambda \mathbb{E}(X) + (1-\lambda)\mathbb{E}(Y) = 0 \\
\mathrm{Var}(U_\lambda) &= \mathbb{E}(U_\lambda^2) = \sum_u u^2 p_\lambda(u) = \lambda \sum_u u^2 p_X(u) + (1-\lambda) \sum_u u^2 p_Y(u) \\
&= \lambda \mathbb{E}(X^2) + (1-\lambda)\mathbb{E}(Y^2) = \lambda \mathrm{Var}(X) + (1-\lambda)\mathrm{Var}(Y) = 1.
\end{aligned}$$

E nel caso **b)** si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U_\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} u p_\lambda(u) du = \lambda \int_{\mathbb{R}} u p_X(u) du + (1-\lambda) \int_{\mathbb{R}} u p_Y(u) du \\
&= \lambda \mathbb{E}(X) + (1-\lambda)\mathbb{E}(Y) = 0 \\
\mathrm{Var}(U_\lambda) &= \mathbb{E}(U_\lambda^2) = \int_{\mathbb{R}} u^2 p_\lambda(u) du = \lambda \int_{\mathbb{R}} u^2 p_X(u) du + (1-\lambda) \int_{\mathbb{R}} u^2 p_Y(u) du \\
&= \lambda \mathbb{E}(X^2) + (1-\lambda)\mathbb{E}(Y^2) = \lambda \mathrm{Var}(X) + (1-\lambda)\mathrm{Var}(Y) = 1.
\end{aligned}$$

Dunque, in entrambi i casi,

$$\mathbb{E}(U_\lambda) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(U_\lambda) = 1.$$

Se Z_λ e U_λ hanno la stessa legge allora hanno la stessa media e la stessa varianza. Per la media, le cose tornano. Ma per la varianza, dev'essere

$$2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 1$$

da cui segue che $\lambda = 0, 1$. Quindi, se $\lambda \in (0,1)$, p_λ non può mai essere la densità di Z_λ.
Studiamo ora il caso $\lambda \in \{0,1\}$. Se $\lambda = 0$ allora $Z_0 = Y$ e $p_0 = p_Y$, quindi l'asserzione è vera.
Analogamente $Z_1 = X$ e $p_1 = p_X$.

Ricapitolando, l'asserzione è falsa per $\lambda \in (0,1)$ ed è vera se $\lambda \in \{0,1\}$.

Esercizio 4. a) $(U,V) = \phi(x,y) = (\ln X - Y, Y)$, dove $\phi : O = \{(x,y) : \ln x > y > 0\} \to (0,+\infty)^2$ è un diffeomorfismo di inversa $\psi(u,v) = (e^{u+v}, v)$. Poiché $\mathbb{P}((X,Y) \in O) = 1$, possiamo usare il TCV: $f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(\psi(u,v))|\det D\psi(u,v)| 1\!\!1_{(u,v)\in\phi(O)}$. Qui,

$$D\psi(u,v) = \begin{pmatrix} e^{u+v} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\det D\psi(u,v) = e^{u+v}$. Sostituendo, otteniamo

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{(n-1)!}\, u^{n-1}e^{-u} 1\!\!1_{u>0}\, e^{-v} 1\!\!1_{v>0},$$

da cui si evince che $U \perp\!\!\!\perp V$, $U \sim \Gamma(n,1)$ e $V \sim \mathrm{Exp}(1)$.

b) Poiché $V_n \sim \Gamma(n,1)$, V_n ha la stessa legge di $X_1 + \cdots + X_n$, dove $X_1, \ldots, X_n$ sono i.i.d. di legge Exp(1). Quindi, per ogni $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n}V_n - 1\Big| > \delta\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i))\Big| > \delta\Big) \to 0$$

per la LGN, dunque $\frac{1}{n}V_n \to 1$ in probabilità. In alternativa, si può risolvere nel modo seguente. Osserviamo che $\mathbb{E}(V_n) = n$ e $\mathrm{Var}(V_n) = n$. Quindi, per $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n}V_n - 1\Big| > \delta\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big|V_n - \mathbb{E}(V_n)\Big| > n\delta\Big)$$

e per la disuguaglianza di Chebychev,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n}V_n - 1\Big| > \delta\Big) \le \frac{\mathrm{Var}(V_n)}{(n\delta)^2} = \frac{n}{n^2\delta^2} = \frac{1}{n\delta^2} \to 0$$

quando $n \to \infty$, da cui la tesi.

c) Usando la rappresentazione, in legge, di V_n come la somma di n v.a. $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. di legge Exp(1), osserviamo che Z_n ha la stessa legge di

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n) - \sqrt{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i))}{\sqrt{n}} \to Z \sim N(0,1) \text{ in legge.}$$

Dunque, $Z_n \to Z \sim N(0,1)$ in legge. Oppure, si può risolvere studiando la funzione caratteristica. Si ha

$$\varphi_{Z_n}(\theta) = \varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}V_n - \sqrt{n}}(\theta) = e^{-i\theta\sqrt{n}}\varphi_{V_n}\Big(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\Big)) = e^{-i\theta\sqrt{n}}\Big(\frac{1}{1 - i\frac{\theta}{\sqrt{n}}}\Big)^n.$$

Ora, per $x \simeq 0$, $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, quindi (per $x = -i\theta/\sqrt{n}$)

$$1 - i\frac{\theta}{\sqrt{n}} = e^{-i\frac{\theta}{\sqrt{n}}} + \frac{\theta^2}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Sostituendo,

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(\theta) &= e^{-i\theta\sqrt{n}}\Big(e^{-i\frac{\theta}{\sqrt{n}}} + \frac{\theta^2}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^{-n} = e^{-i\theta\sqrt{n}}\, e^{i\theta\sqrt{n}}\Big(1 + \frac{\theta^2 e^{i\frac{\theta}{\sqrt{n}}}}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^{-n} \\ &= \Big(1 + \frac{\theta^2}{2a_n(\theta)}\Big)^{-n},\end{aligned}$$

dove $a_n(\theta) = \frac{n}{e^{i\frac{\theta}{\sqrt{n}}} + no(\frac{1}{n})}$. Poiché, per ogni θ, $\lim_{n\to\infty} a_n(\theta)/n = 1$, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(\theta) = e^{-\frac{\theta^2}{2}},$$

che è la f.c. della legge N$(0,1)$. Dunque, $Z_n \to Z \sim$ N$(0,1)$ in legge.

Esercizio 5. a) Abbiamo due casi: $\alpha = 1$ e $\alpha \in [0,1)$.
• *Caso* $\alpha = 1$. Lo stato 1 è transitorio perché comunica con lo stato 2, che è assorbente, e quindi non vale il viceversa. Lo stato 2 è assorbente e quindi ricorrente. Gli stati 3 e 4 sono ricorrenti perché costituiscono una classe chiusa irriducibile. Le classi irriducibili sono $C_1 = \{2\}$ e $C_2 = \{3,4\}$. Infine le distribuzioni stazionarie sono del tipo

$$\pi = \gamma(0,1,0,0) + (1-\gamma)(0,0,5/13,8/13) \text{ per } \gamma \in [0,1]$$

perché $(5/13, 8/13)$ è l'unica distribuzione stazionaria della sottocatena ristretta a C_2. Quest'ultima affermazione si verifica considerando la relazione matriciale

$$(\pi_3, \pi_4) \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = (\pi_3, \pi_4)$$

da cui segue il sistema

$$\begin{cases} \pi_3 = \frac{3}{5}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_4 = \frac{2}{5}\pi_3 + \frac{3}{4}\pi_4 \end{cases}$$

che fornisce la relazione $\pi_3 = \frac{5}{8}\pi_4$ (per entrambe le equazioni); allora, poiché si ha anche la condizione $\pi_3 + \pi_4 = 1$, si ottiene

$$1 - \pi_4 = \frac{5}{8}\pi_4, \ 1 = \frac{13}{8}\pi_4, \ \pi_4 = \frac{8}{13}$$

e $\pi_3 = \frac{5}{13}$.
• *Caso* $\alpha \in [0,1)$. Gli stati 1 e 2 sono stati transitori; infatti, per ogni $i \in T = \{1,2\}$, i comunica con 3 ma non vale il viceversa. Inoltre, come per il caso $\alpha = 1$, gli stati 3 e 4 costituscono una classe chiusa irriducibile. Quindi si ha una sola classe chiusa irriducibile $C = \{3,4\}$ e, tenendo conto di alcuni calcoli fatti in precedenza per il caso $\alpha = 1$,

$$\pi = (0,0,5/13,8/13)$$

è l'unica distribuzione stazionaria.
b) Si deve considerare la seguente relazione matriciale

$$(1/2, 1/2, 0, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ (1-\alpha)/2 & \alpha & (1-\alpha)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = (p_1, p_2, p_3, p_4),$$

dove $p_i = \mathbb{P}(X_1 = i)$ per ogni $i \in E$. Allora si ottiene

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = \left(\frac{2-\alpha}{4}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right), \frac{1-\alpha}{4}, 0\right) = \left(\frac{2-\alpha}{4}, \frac{1+2\alpha}{4}, \frac{1-\alpha}{4}, 0\right).$$

c) Per l'ipotesi sulla distribuzione di X_0 abbiamo una catena di Markov $\{X_n : n \geq 0\}$ a valori in $C = \{3, 4\}$ e quindi

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{i,j=3}^{4} j\mathbb{P}(X_0 = i)p_{ij}^{(n)}.$$

La sottocatena ristretta a C è regolare perché la corrispondente matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

è tutta positiva. Allora possiamo applicare il teorema di Markov alla sottocatena e, ponendo $(\pi_3, \pi_4) = (5/13, 8/13)$ in accordo con alcuni calcoli fatti in precedenza nella risposta alla domanda **a)**, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \sum_{i=3}^{4} \mathbb{P}(X_0 = i) \sum_{j=3}^{4} j \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i=3}^{4} \mathbb{P}(X_0 = i) \sum_{j=3}^{4} j\pi_j = \sum_{j=3}^{4} j\pi_j,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\sum_{i=3}^{4} \mathbb{P}(X_0 = i) = \mathbb{P}(X_0 \in C) = 1$. In conclusione

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = 3 \cdot \frac{5}{13} + 4 \cdot \frac{8}{13} = \frac{47}{13}.$$

d) Sia $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \in C\}$ dove $C = \{3, 4\}$. Poniamo $\mu_i = \mathbb{E}[\tau | X_0 = i]$ per $i \in T = \{1, 2\}$. Allora, poiché si suppone $\alpha = 0$, dobbiamo considerare il seguente sistema

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + p_{11}\mu_1 + p_{12}\mu_2 = 1 + \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2} \\ \mu_2 = 1 + p_{21}\mu_1 = 1 + \frac{\mu_1}{2}, \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} \mu_1 - \mu_2 = 2 \\ -\mu_1 + 2\mu_2 = 2. \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

e le soluzioni sono

$$\mu_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 4 + 2 = 6,$$

$$\mu_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 2 + 2 = 4.$$

In conclusione il valor medio richiesto è $\mu_1 = 6$.