Soluzioni esami/esoneri fino all'a.a. 2010/2011

# Indice

# 1 Soluzioni - I Esonero a.a. 2008/2009

**Esercizio 1. a)** Si ha
$$\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}(2X) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$
quindi $\mathbb{Q}$ è una misura di probabilità.
**b)** Ovviamente (visto a lezione), $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ e $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = 2\,X$. Viceversa, preso $A \in \mathscr{F}$ tale che $\mathbb{Q}(A) = 0$ allora $\mathbb{E}(2X\mathbf{1}_A) = 0$. Ma $2X\mathbf{1}_A \geq 0$ $\mathbb{P}$-q.c., quindi dev'essere $2X\mathbf{1}_A = 0$ $\mathbb{P}$-q.c. Essendo $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, dev'essere necessariamente $\mathbf{1}_A = 0$ $\mathbb{P}$-q.c., cioè $\mathbb{P}(A) = 0$. Quindi, $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ ed allora $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{2\,X}$.
**c)** Ricordando che $Y \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ se e solo se $Y\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e in tal caso, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|Y|^p) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(|Y|^p\,\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})$, si ha:
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|e^X|^p) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big(e^{pX}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big) = \int_0^{+\infty} e^{px}2x \cdot 2e^{-2x}\,dx = 4\int_0^{+\infty} xe^{-(2-p)x}\,dx < \infty \text{ sse } p < 2.$$
Quindi, $Y \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ per $p < 2$ e altrimenti, $Y \notin L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$.
**d)** Presa $Z$ indipendente da $X$, si ha, per $\Gamma \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,
$$\mathbb{Q}(Z \in \Gamma) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{Z\in\Gamma}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{Z\in\Gamma} \cdot 2X) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{Z\in\Gamma}) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(2X) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{Z\in\Gamma}) = \mathbb{P}(Z \in \Gamma)$$
perché $\mathbf{1}_{Z\in\Gamma}$ e $X$ sono indipendenti sotto $\mathbb{P}$, da cui la tesi.

**Esercizio 2. a)** $\mu_n$ è una combinazione lineare convessa a coefficienti non negativi di tre misure di probabilità, quindi è una misura di probabilità. Ora, supponiamo che $\{\mu_n\}_n$ sia *tight*, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un indice $n_0$ ed un numero positivo $L > 1$ tali che $\inf_{n\geq n_0} \mu_n([-L, L]) \geq 1 - \varepsilon$. Poiché
$$\mu_n([-L, L]) = p_n\delta_{\{n\}}([-L, L]) + q_n\delta_{\{1\}}([-L, L]) + (1 - p_n - q_n)\delta_{\{0\}}([-L, L])$$
per ogni $n \geq n_0 \vee L$ si ha
$$1 - \varepsilon \leq q_n + (1 - p_n - q_n) = 1 - p_n$$
cioè $p_n \leq \varepsilon$ definitivamente, da cui $p_n \to 0$.
Viceversa, supponiamo $p_n \to 0$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 > 1$ tale che per $n \geq n_0$, si ha $p_n \leq \varepsilon$. Preso allora $L = n_0 - 1$, si ha
$$\begin{aligned}\mu_n([-L, L]) &= p_n\delta_{\{n\}}([-L, L]) + q_n\delta_{\{1\}}([-L, L]) + (1 - p_n - q_n)\delta_{\{0\}}([-L, L])\\ &= 0 + q_n + 1 - p_n - q_n = 1 - p_n \geq 1 - \varepsilon\end{aligned}$$
per ogni $n \geq n_0$, da cui segue che $\{\mu_n\}_n$ è *tight*.
**b)** Detta $F_n$ la funzione di distribuzione associata a $\mu_n$, si ha
$$F_n(x) = p_n\mathbf{1}_{n\leq x} + q_n\mathbf{1}_{1\leq x} + (1 - p_n - q_n)\mathbf{1}_{0\leq x} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{1}_{0\leq x}.$$

Quindi, se $F(x)$ denota la f.d. di $X = 0$ q.c.,

$$F_n(x) \to F(x) \text{ per ogni } x \neq 0, \text{ cioè per ogni } x \text{ t.c. } \Delta F(x) = 0$$

(osserviamo che per avere questa convergenza basta che $p_n \to 0$ e $q_n \to 0$). Ma allora, $X_n \to 0$ in legge, quindi in probabilità. Ovviamente, il limite in $L^p$ e/o q.c., se esiste, non può che essere $X = 0$ q.c.
Vediamo la convergenza in $L^p$. Si ha

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = n^p \cdot p_n + 1 \cdot q_n + 0 = n^{p-4} + n^{-2}$$

che converge a zero sse $p < 4$. Quindi $X_n \to 0$ in $L^p$ per $p < 4$. Per la convergenza q.c., studiamo, per $\varepsilon > 0$, la serie $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)$. Si ha

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = p_n \mathbf{1}_{n>\varepsilon} + q_n \mathbf{1}_{1>\varepsilon} + (1 - p_n - q_n)\mathbf{1}_{0>\varepsilon}$$

quindi per ogni $n$ grande abbastanza, si ha

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq p_n + q_n.$$

Poiché $\sum_n (p_n + q_n) < \infty$, possiamo concludere che $X_n \to 0$ q.c.

**Esercizio 3.** **a)** Ricordando che $X_1, \ldots$ sono i.i.d. e di Cauchy, si ha

$$\varphi_{S_n}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{Z_k}(\theta) = e^{-n|\theta|}$$

quindi

$$\varphi_{\frac{1}{n}S_n}(\theta) = \varphi_{S_n}\left(\frac{1}{n}\theta\right) = e^{-|\theta|}$$

il che prova che $\frac{1}{n}S_n$ è una v.a. di Cauchy.

**b)** Usiamo il teorema di continuità di Lévy:

$$\varphi_{X_n}(\theta) = \varphi_{n^{-\alpha}S_n}(\theta) = \varphi_{S_n}(n^{-\alpha}\theta) = e^{-n^{1-\alpha}|\theta|} \to g_\alpha(\theta) \text{ per } n \to \infty$$

dove

$$g_\alpha(\theta) = \begin{cases} \mathbf{1}_{\theta=0} & \text{se } \alpha < 1 \\ e^{-|\theta|} & \text{se } \alpha = 1 \\ 1 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi: per $\alpha < 1$, $\{X_n\}_n$ non converge in legge[1]; per $\alpha = 1$, $X_n \to X$ di Cauchy in legge; per $\alpha > 1$, $X_n \to 0$ in legge.

[1] La funzione $\mathbf{1}_{\theta=0}$ non può essere la f.c. di una qualche v.a. perché non è continua in 0.

**c)** Se $\alpha = 3$, senz'altro $X_n \to 0$ in probabilità. La convergenza in $L^p$ non può esserci per nessun valore di $p$ perché $X_n = n^{-1} \cdot \frac{1}{n} S_n \notin L^p$ per ogni $p \geq 1$ (le v.a. di Cauchy non hanno media!!). Studiamo ora la convergenza q.c. Fissato $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, si ha

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}\Big(\Big|n^{-2} \cdot \frac{1}{n} S_n\Big| > \varepsilon\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n} S_n\Big| > n^2 \varepsilon\Big) = 2 \int_{n^2\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx$$

Considerando il cambio di variabile $y = 1/x$, si ottiene

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 2 \int_0^{1/(n^2\varepsilon)} \frac{1}{\pi(1+y^2)}\, dy \leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2 \varepsilon} = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

Quindi, $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$ ed allora $X_n \to 0$ q.c.

---

## 2 Soluzioni - II Esonero a.a. 2008/2009

**Esercizio 1. a)** Sappiamo che se la $\sigma$-algebra condizionante è generata da una partizione finita o al più numerabile di $\Omega$ allora la media condizionale è costante sugli elementi della partizione:

$$\mathbb{E}(W \,|\, \mathscr{G}) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{1}_{C_i}, \text{ con } \alpha_i = \frac{\mathbb{E}(W \mathbf{1}_{C_i})}{\mathbb{P}(C_i)}$$

dove si ponga, ad esempio, $\alpha_i := 0$ se $\mathbb{P}(C_i) = 0$. Per la verifica, si veda l'esercitazione di riferimento.
Qui, $Z$ può assumere solo due valori, 0 e 1. Quindi, $\mathscr{C} = \{C_1, C_2\}$ dove

$$C_1 = \{Z = 1\} = \{X + Y = 0\} \ \text{ e } \ C_2 = \{Z = 0\} = \{X + Y \neq 0\}$$

**b)** Presa $W = X$, si ha

$$\alpha_1 = \frac{\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{C_1})}{\mathbb{P}(C_1)} = \frac{\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X+Y=0})}{\mathbb{P}(X+Y=0)} = 0$$

perché $X \mathbf{1}_{X+Y=0} = 0$ q.c., e

$$\alpha_2 = \frac{\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{C_2})}{\mathbb{P}(C_2)} = \frac{\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X+Y \geq 1})}{\mathbb{P}(X+Y \geq 1)}.$$

Ma, $X \mathbf{1}_{X+Y\geq 1} = X - X \mathbf{1}_{X+Y=0} = X$ q.c. e $\mathbb{P}(X + Y \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X + Y = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - (1-p)^2 = p(2-p)$. Quindi,

$$\alpha_2 = \frac{\mathbb{E}(X)}{p(2-p)} = \frac{p}{p(2-p)} = \frac{1}{2-p}.$$

Infine, per simmetria dev'essere $\mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G})=\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G})$, da cui segue che

$$\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G})=\mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G})=\frac{1}{2-p}\,\mathbf{1}_{Z=0}=\frac{1}{2-p}\,\mathbf{1}_{X+Y\geq 1}.$$

Essendo uguali, $\mathbb{E}(X\,|\,\mathscr{G})$ e $\mathbb{E}(Y\,|\,\mathscr{G})$ non possono certo essere indipendenti.

**c)** Poniamo $W_k=\mathbb{E}(X_k\,|\,\mathscr{G}_k)=\frac{1}{2-p}\,\mathbf{1}_{Z_k=0}$. Essendo le $Z_k=X_k+Y_k$ i.i.d., le $W_k$ sono anch'esse i.i.d. Ora, la presenza di $\sqrt{n}$ suggerisce (o quantomeno dovrebbe suggerire) il TLC. Calcoliamo media e varianza di $W_k$:

$$\begin{gathered}\mathbb{E}(W_k)=\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_k\,|\,\mathscr{G}_k)\big)=\mathbb{E}(X_k)=p=:\mu\\ \mathbb{E}(W_k^2)=\mathbb{E}\big(\frac{1}{(2-p)^2}\,\mathbf{1}_{Z_k=0}\big)=\frac{1}{(2-p)^2}\,p(2-p)=\frac{p}{2-p}\\ \text{quindi }\operatorname{Var}(W_k)=\frac{p}{2-p}-p^2=:\sigma^2\end{gathered}$$

Ora,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_k\,|\,\mathscr{G}_k\big)-\sqrt{n}\,p=\sigma\,\frac{\sum_{k=1}^{n}(W_k-\mu)}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

e il TLC dà

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_k\,|\,\mathscr{G}_k\big)-\sqrt{n}\,p\xrightarrow{w}\mathrm{N}(0,\sigma^2)$$

**Esercizio 2.** **a)** Poiché $X_n-X_{n-1}=Y_nf_n(X_0,\dots,X_n)$, si ha

$$\begin{aligned}|X_n|&\leq|X_0|+|X_n-X_0|=|Y_0|+\big|\sum_{k=1}^{n}Y_kf_k(X_0,\dots,X_k)\big|\\ &\leq|Y_0|+\sum_{k=1}^{n}|Y_k|f_k(X_0,\dots,X_k)\leq|Y_0|+\sum_{k=1}^{n}|Y_k|L_k\end{aligned}$$

dove $L_k$ è t.c. $(0\leq)f_k(x)\leq L_k$ per ogni $x\in\mathbb{R}^k$. Essendo $Y_0,\dots,Y_n$ integrabili, ne segue che $X_n$ è integrabile, per ogni $n$. Poi, $X_0=Y_0$ è ovviamente $\mathscr{F}_0$-misurabile. Supponiamo quindi che $X_n$ sia $\mathscr{F}_n$-misurabile e proviamo che $X_{n+1}$ è $\mathscr{F}_{n+1}$-misurabile: $X_{n+1}$ è funzione (misurabile) di $X_0,\dots,X_n$ e di $Y_{n+1}$. Essendo tali v.a. tutte $\mathscr{F}_{n+1}$-misurabili, la tesi segue immediatamente. Infine,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n)&=\mathbb{E}\Big(\underbrace{X_n}_{\mathscr{F}_n\text{-mis}}+\underbrace{Y_{n+1}}_{\text{indip. da }\mathscr{F}_n}\underbrace{f_{n+1}(X_0,\dots,X_n)}_{\mathscr{F}_n\text{-mis}}\,|\,\mathscr{F}_n\Big)\\ &=X_n+\mathbb{E}(Y_{n+1})f_n(X_0,\dots,X_n)=X_n+\mu f_n(X_0,\dots,X_n)\end{aligned}$$

dove $\mu=\mathbb{E}(Y_n)$. Ricordando che $f_n\geq 0$, otteniamo:

- $\mu>0$: $\{X_n\}_n$ è $\mathscr{F}_n$-submartingala;

- $\mu = 0$: $\{X_n\}_n$ è $\mathscr{F}_n$-martingala;
- $\mu < 0$: $\{X_n\}_n$ è $\mathscr{F}_n$-supermartingala.

**b)** Si ha, per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\{\tau = n\} &= \{Y_0 = 0, \dots, Y_{n-1} = 0, Y_n \neq 0\} \\ &= \underbrace{\{Y_0 = 0\}}_{\in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_n} \bigcap \cdots \bigcap \underbrace{\{Y_{n-1} = 0\}}_{\in \mathscr{F}_{n-1} \subset \mathscr{F}_n} \bigcap \underbrace{\{Y_n \neq 0\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n\end{aligned}$$

dunque $\tau$ è un t.a. È q.c. finito perché

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau = \infty) &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\tau > N) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(Y_0 = 0, \dots, Y_N = 0) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(Y_0 = 0)^{N+1} = \lim_{N\to\infty} (1-2p)^{N+1} = 0.\end{aligned}$$

**c)** Si ha

$$X_{\tau\wedge n} = X_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\tau\leq n} + X_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\tau>n} = X_\tau \mathbf{1}_{\tau\leq n} + X_n\mathbf{1}_{\tau>n} = \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbf{1}_{\tau=k} + X_n \mathbf{1}_{\tau>n}$$

Ma, su $\{\tau = k\}$ si ha $0 = Y_0 = \cdots = Y_{k-1}$ e $Y_k \neq 0$, quindi $0 = X_0 = \cdots = X_{k-1}$ e $X_k = Y_k f_k(0, \dots, 0)$. Invece, su $\{\tau > n\}$ si ha $Y_0 = \cdots = Y_n = 0$, quindi $0 = X_0 = \cdots = X_n$. Dunque

$$X_{\tau\wedge n} = \sum_{k=1}^{n} Y_k f_k(0, \dots, 0)\mathbf{1}_{\tau=k}$$

Passando ai moduli, ricordando che $|Y_k| \leq 1$ q.c. e $f_k(0) \leq 1/k^2$, q.c. si ha

$$|X_{\tau\wedge n}| \leq \sum_{k=1}^{n} |Y_k| f_k(0)\mathbf{1}_{\tau=k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} =: M$$

Osserviamo che qui $\mu = 0$, quindi $X_n$ è una martingala. Per il teorema d'arresto di Doob, si ha

$$\mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0) = 0.$$

Ma, $X_{\tau\wedge n} \to X_\tau$ q.c. per $n \to \infty$ perché $\tau$ è q.c. finito e abbiamo visto che $X_{\tau\wedge n}$ è uniformemente q.c. limitata. Allora, per BDD si ha

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) = 0.$$

**Esercizio 3.** **a)** Sia $A \in \mathscr{F}_n$ tale che $\mathbb{P}_n(A) = 0$. Allora $A \in \mathscr{F}$ e $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_n(A) = 0$, quindi $\mathbb{Q}(A) = 0$. Essendo $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}_n(A)$, segue la tesi.

**b)** Indicheremo con $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}$, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}$ l'aspettazione rispettivamente sotto $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_n$.

Fissato $n$ e $A \in \mathscr{F}_n$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}(X_n \mathbf{1}_A) && [\text{perché } (\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}) \equiv (\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n) \text{ e } X_n \mathbf{1}_A \text{ è } \mathscr{F}_n\text{-mis. e int.}] \\
&= \mathbb{Q}_n(A) && [\text{perché } X_n = \tfrac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}_n} \text{ e } A \in \mathscr{F}_n] \\
&= \mathbb{Q}(A) && [\text{perché } (\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{Q}) \equiv (\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{Q}_n) \text{ e } A \in \mathscr{F}_n] \\
&= \mathbb{E}(X \mathbf{1}_A) && [\text{perché } X = \tfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]
\end{aligned}$$

da cui segue che $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n)$. Inoltre, un processo di questo tipo è sempre una martingala: poiché $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$, per la proprietà "della torre", si ha

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_{n+1}) \,\big|\, \mathscr{F}_n\big) = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n) = X_n$$

Infine, $X_n \geq 0$ perché è una densità. Quindi

$$\|X_n\|_{L^1(\mathbb{P})} = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}(X_n) = \mathbb{Q}_n(\Omega) = 1$$

cioè $\{X_n\}_n$ è limitata il $L^1$. Il teorema di convergenza di Doob garantisce l'esistenza di una v.a. $Z$ integrabile (sotto $\mathbb{P}$) e $\mathscr{F}_\infty$-misurabile tale che $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n) \to Z$ q.c.

---

# 3 Soluzioni - Scritto, I Appello I Sessione a.a. 2008/2009

**Esercizio 1. a)** Osserviamo che $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{4}x^2}$ è la densità di una $\mathrm{N}(0, 2)$ e che

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(A) = \int_A g(x)dx$$

dunque, $X \sim \mathrm{N}(0, 2)$. Poi, essendo $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(e^{X-1}\mathbf{1}_A)$, si ha

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}(e^{X-1}) = e^{2/2}e^{-1} = 1$$

perché $\mathbb{E}(e^{\lambda Z}) = e^{\lambda^2/2}$ se $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

**b)** Prendiamo $Y_1, Y_2$ indipendenti tra loro e con $X$. Allora, per ogni boreliano $A_1$ e $A_2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(Y_1 \in A_1, Y_2 \in A_2) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{Y_1 \in A_1, Y_2 \in A_2}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y_1 \in A_1, Y_2 \in A_2} e^{X-1}) \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y_1 \in A_1, Y_2 \in A_2})\mathbb{E}(e^{X-1}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y_1 \in A_1}\mathbf{1}_{Y_2 \in A_2}) \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y_1 \in A_1})\mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y_2 \in A_2}) = \mathbb{P}(Y_1 \in A_1)\mathbb{P}(Y_2 \in A_2)
\end{aligned}$$

Prendendo poi $A_2 = \mathbb{R}$, otteniamo

$$\mathbb{Q}(Y_1 \in A_1) = \mathbb{Q}(Y_1 \in A_1, Y_2 \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(Y_1 \in A_1)\mathbb{P}(Y_2 \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(Y_1 \in A_1)$$

e analogamente troviamo
$$\mathbb{Q}(Y_2 \in A_2) = \mathbb{P}(Y_2 \in A_2)$$
Dunque, sotto $\mathbb{Q}$ si ha: 1) la legge congiunta è la misura prodotto delle leggi marginali, quindi $Y_1$ e $Y_2$ rimangono indipendenti; 2) la legge congiunta è uguale a quella sotto $\mathbb{P}$.

**c)** Per quanto appena visto, $\{Y_k\}_k$ rimangono i.i.d. anche sotto $\mathbb{Q}$ e ancora di media nulla e varianza $\sigma^2$. Se $\alpha = 1/2$, possiamo applicare il TLC:
$$\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^n Y_k \xrightarrow{w} \mathrm{N}(0,\sigma^2), \quad n\to\infty$$
Se invece $\alpha > 1/2$ abbiamo una situazione del tipo
$$W_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^n Y_k = \gamma_n \cdot Z_n$$
con $\gamma_n = n^{1/2-\alpha} \to 0$ e $Z_n \xrightarrow{w} \mathrm{N}(0,\sigma^2)$. Dunque, dovrebbe essere $W_n \xrightarrow{w} 0$. Infatti,
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|W_n|^2) = \mathbb{E}(|W_n|^2) = \gamma_n^2 \mathrm{Var}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n Y_k\Big) = \gamma_n^2 \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}\big(Y_k\big) = \gamma_n^2\sigma^2 \to 0, \quad n\to\infty$$
Dunque, $W_n \to 0$ in $L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{Q})$ e quindi $W_n \xrightarrow{w} 0$.

**Esercizio 2.** Studiamo la funzione caratteristica $\varphi_n$:
$$\varphi_n(\theta) = \varphi_{\frac{1}{n^2}\mathrm{Po}(n^2)}(\theta) = \varphi_{\mathrm{Po}(n^2)}\Big(\frac{\theta}{n^2}\Big) = \exp\big(n^2(e^{i\frac{\theta}{n^2}}-1)\big)$$
Ora,
$$e^{i\frac{\theta}{n^2}} - 1 = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\Big(i\frac{\theta}{n^2}\Big)^k = i\frac{\theta}{n^2} + \sum_{k\geq 2}\frac{1}{k!}\Big(i\frac{\theta}{n^2}\Big)^k = i\frac{\theta}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$
Quindi
$$\varphi_n(\theta) = \exp\Big(i\theta + o(1)\Big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{i\theta} =: \varphi(\theta).$$
Essendo $\varphi$ continua nell'origine, è (per il teorema di convergenza di Lévy) la funzione caratteristica di una v.a. cui $\{\frac{1}{n^2}X_n\}_n$ converge debolmente. È facile vedere che $\varphi$ è la funzione caratteristica della v.a. $Z=1$ q.c., quindi $\frac{1}{n^2}X_n \xrightarrow{w} 1$. Essendo il limite debole costante q.c., la convergenza avviene anche in probabilità. Vediamo in $L^2$. Osserviamo che $1 = \mathbb{E}(\frac{1}{n^2}X_n)$, quindi
$$\mathbb{E}\Big(\Big|\frac{1}{n^2}X_n - 1\Big|^2\Big) = \mathrm{Var}\Big(\frac{1}{n^2}X_n\Big) = \frac{1}{n^4}\mathrm{Var}(X_n) = \frac{1}{n^2} \to 0$$
dunque la convergenza avviene anche in $L^2$. Infine, per $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n^2}X_n - 1\Big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{\mathrm{Var}\big(\frac{1}{n^2}X_n\big)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}$$

e quindi $\sum_n \mathbb{P}\big(\big|\frac{1}{n^2}X_n - 1\big| > \varepsilon\big) < \infty$. Ma allora, usando BC1, possiamo concludere che la convergenza a 1 è anche q.c.

**Esercizio 3.** **a)** Per ogni $n$, $X_n$ è integrabile (perché prodotto di v.a. indipendenti ed integrabili) e $\mathscr{F}_n$-misurabile (perché prodotto di v.a. $\mathscr{F}_n$-misurabili). Poi,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(\underbrace{X_n}_{\mathscr{F}_n\text{-mis.}} \cdot (\underbrace{Y_{n+1} + 1}_{\text{indip. da } \mathscr{F}_n}) \,|\, \mathscr{F}_n) = X_n \underbrace{\mathbb{E}(Y_{n+1} + 1)}_{=1} = X_n$$

quindi $\{X_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala.

**b)** Fissato $n$,

$$\begin{aligned}\{\tau = n\} &= \{Y_0 \neq -1, \dots, Y_{n-1} \neq -1, Y_n = -1\} \\ &= \underbrace{\{Y_0 \neq -1\}}_{\in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_n} \bigcap \dots \bigcap \underbrace{\{Y_{n-1} \neq -1\}}_{\in \mathscr{F}_{n-1} \subset \mathscr{F}_n} \bigcap \underbrace{\{Y_n = -1\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n\end{aligned}$$

e quindi $\tau$ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto. Inoltre,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > N) &= \mathbb{P}(Y_0 \neq -1, \dots, Y_{N-1} \neq -1, Y_N \neq -1) \\ &= \Big(\mathbb{P}(Y_0 \neq -1)\Big)^{N+1} = \Big(\frac{3}{4}\Big)^{N+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

dunque è q.c. finito. Ora, q.c. (perché quanto stiamo per scrivere vale sull'evento $\{\tau < \infty\}$) si ha

$$X_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} X_\tau \mathbf{1}_{\tau=n} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \mathbf{1}_{\tau=n}$$

Ma, su $\{\tau = n\}$, si ha $Y_n = -1$ e quindi $X_n = X_{n-1}(Y_n + 1) = 0$, da cui segue che $X_\tau = 0$ q.c.

**c)** $\tau \wedge n$ è un tempo d'arresto limitato e $X$ è una martingala: per il teorema d'arresto di Doob,

$$\mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(Y_0) = 1.$$

**d)** Poiché $\tau$ è q.c. finito, quando $n \to \infty$ si ha $\tau \wedge n \to \tau$ q.c. e quindi $X_{\tau\wedge n} \to X_\tau = 0$ q.c. Ma la convergenza non avviene in $L^1$: se così fosse, si avrebbe $\mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) \to \mathbb{E}(X_\tau) = 0$, il che è falso perché $\mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) = 1$ per ogni $n$. Dunque, non converge neanche in $L^2$.

---

# 4 Soluzioni - Scritto, II Appello I Sessione a.a. 2008/2009

**Esercizio 1. a)** Basta ricordare che $A \in \mathscr{F}$ se e solo se $A = \bigcup_{i \in I_A} C_i$, con $I_A \subset I$ ($I_A = \emptyset$ dà $A = \emptyset$). Quindi, per $A \in \mathscr{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I_A} \mathbb{P}(C_i)$$

cioè, $\{\mathbb{P}(C_i)\}_{i \in I}$ dà in modo univoco $\mathbb{P}$ su tutta la $\sigma$-algebra $\mathscr{F}$.

**b1)** Basta ricordare che $X$ è, in particolare, $\mathscr{F}$-misurabile ed è un risultato noto (cfr. corso) che le v.a. misurabili rispetto ad una $\sigma$-algebra generata da una partizione sono costanti sugli elementi della partizione. Quindi,

$$X(\omega) = \sum_{i \in I} x_i \mathbf{1}_{\omega \in C_i}.$$

**b2)** Si ha $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X\mathbf{1}_A)$. Preso $A = C_j$,

$$\mathbb{Q}(C_j) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X\mathbf{1}_{C_j}) = x_j \mathbb{P}(C_j)$$

Quindi, se $\mathbb{P}(C_j) > 0$,

$$x_j = \frac{\mathbb{Q}(C_j)}{\mathbb{P}(C_j)}$$

e altrimenti, possiamo porre (ad esempio) $x_j = 0$.

**c)** Viene da pensare che si possa usare il TLC. Infatti, osserviamo che

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X) = \mathbb{Q}(\Omega) = 1$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X^2) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) < \infty$$

cioè le $X_n$ hanno tutte media 1 e varianza $\sigma^2$ finita. Dal TLC, si ha che $V_n \to V \sim \mathrm{N}(0,1)$ in legge, dove

$$V_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i - \sqrt{n}\Big)$$

Allora,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i > \sqrt{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sigma V_n > 0) = \mathbb{P}(V > 0) = \frac{1}{2}.$$

**Esercizio 2. a)** Si ha

$$\varphi_{X_n}(t) = \mathbb{E}(e^{itX_n}) = \mathbb{E}(e^{itX_n}\mathbf{1}_{\{Z_n=0\}}) + \mathbb{E}(e^{itX_n}\mathbf{1}_{\{Z_n=1\}})$$
$$= \mathbb{E}(e^{itY_n}\mathbf{1}_{\{Z_n=0\}}) + \mathbb{E}(e^{-itY_n}\mathbf{1}_{\{Z_n=1\}}) = \mathbb{E}(e^{itY_n})\mathbb{P}(Z_n = 0) + \mathbb{E}(e^{-itY_n})\mathbb{P}(Z_n = 1)$$

e quindi

$$\varphi_{X_n}(t) = (1 - p_n)\,\frac{n}{n - it} + p_n\,\frac{n}{n + it}$$

$$= \frac{n}{n-it} + p_n\Big(\frac{n}{n+it} - \frac{n}{n-it}\Big) = \frac{n}{n-it} - p_n\,\frac{2it}{n^2+t^2}$$

Allora
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = 1$$
che è la f.c. della v.a. $X = 0$ q.c. Dunque, $X_n \to 0$ in legge e quindi (essendo il limite q.c. costante) in probabilità.

**b)** Il candidato limite è, in ogni caso, $X = 0$ q.c. Osserviamo che $|X_n| = Y_n$, quindi basta far vedere se $Y_n \to 0$ q.c. e/o in $L^p$.

Preso $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) = e^{-n\varepsilon} = \big(e^{-\varepsilon}\big)^n$$
Allora, $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$ e per BC1, $X_n \to 0$ q.c.

Poi, $V_n = nY_n \sim \mathrm{Exp}(1)$, allora
$$\mathbb{E}(|Y_n|^p) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n^p}V_n^p\Big) = \frac{1}{n^p}\underbrace{\int_0^\infty x^p e^{-x}dx}_{<\infty} \to 0 \text{ quando } n\to\infty$$
da cui segue anche la convergenza in $L^p$ a 0, per ogni $p$.

**Esercizio 3. a)** $X_n$ è $\mathscr{F}_n$-misurabile (perché somma di v.a. $\mathscr{F}_n$-misurabili) ed integrabile, perché $M_{k-1}, M_k - M_{k-1} \in L^2$ e quindi $M_{k-1}(M_k - M_{k-1}) \in L^1$ (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz), per ogni $k$. Inoltre,
$$\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}\Big(X_n + \frac{M_n(M_{n+1}-M_n)}{n}\,\Big|\,\mathscr{F}_n\Big)$$
Ma $X_n$ e $M_n$ sono $\mathscr{F}_n$-misurabili, quindi
$$\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n) = X_n + \frac{M_n}{n}\underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1}-M_n\,|\,\mathscr{F}_n)}_{=0:\ M \text{ è } \mathscr{F}_n\text{-mg}} = X_n.$$

Infine, si ha
$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big(|M_{k-1}(M_k - M_{k-1})|^2\big) = \mathbb{E}\big(|M_{k-1}|^2|M_k - M_{k-1}|^2\big)\\ &\le \Big(\mathbb{E}\big(|M_{k-1}|^4\big)\Big)^{1/2}\Big(\mathbb{E}\big(|M_k - M_{k-1}|^4\big)\Big)^{1/2} \le const\cdot L\end{aligned}$$
da cui segue che $X_n \in L^2$.

**b)** Si noti che
$$\mathbb{E}\big((X_n - X_{n-1})^2\big) = \mathbb{E}\Big(\Big|\frac{M_{n-1}(M_n - M_{n-1})}{n}\Big|^2\Big) \le const\cdot\frac{1}{n^2}$$
quindi $\sum_n \mathbb{E}\big((X_n - X_{n-1})^2\big) < \infty$, cioè $X$ è limitata in $L^2$. Ma allora, $X_n$ converge q.c. e in $L^2$, dunque anche in $L^1$, alla v.a. che si può identificare con $\sum_{k\ge1}\frac{M_{k-1}(M_k-M_{k-1})}{k}$.

---

## 5 Soluzioni - I Esonero a.a. 2009/2010

**Esercizio 1.** **a)** $\mathbb{Q}$ è una misura perché $0 < Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Infatti, usando Fubini,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{-f(X)-g(Y)}) = \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{e^{-f(x)-g(y)}}_{\leq 1} e^{-x}\mathbf{1}_{\{x>0\}} e^{-y}\mathbf{1}_{\{y>0\}}\, dxdy \leq \Big(\int_0^{+\infty} e^{-\xi}\, d\xi\Big)^2 = 1.$$

Poi,

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z) = c\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{-f(X)-g(Y)})$$

quindi perché $\mathbb{Q}$ sia una misura di probabilità dev'essere $c = c_{f,g} = \alpha_f \alpha_g$, dove, per $h$ boreliana e non negativa,

$$\alpha_h^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-h(\xi)}\, e^{-\xi}\, d\xi.$$

**b)** Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|XY|^p) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big(|XY|^p \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big) = c_{f,g}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(|XY|^p\, \underbrace{e^{-f(X)-g(Y)}}_{\leq 1}\big)\\ &\leq c_{f,g}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(|X|^p|Y|^p\big) = c_{f,g}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(|X|^p\big)\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(|Y|^p\big) < \infty\end{aligned}$$

perché $X$ e $Y$ sono indipendenti e di legge Exp(1) sotto $\mathbb{P}$. Dunque, $XY \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ per ogni $p \geq 1$. Poi, per $\Gamma \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, si ha

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mathbb{Q}}_{X,Y}(\Gamma) &= \mathbb{Q}((X,Y) \in \Gamma) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_\Gamma(X,Y)) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big(\mathbf{1}_\Gamma(X,Y)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big)\\ &= \alpha_f\alpha_g\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big(\mathbf{1}_\Gamma(X,Y)e^{-f(X)-g(Y)}\Big)\\ &= \int_\Gamma \alpha_f e^{-f(x)-x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}\, \alpha_g e^{-g(y)-y}\mathbf{1}_{\{y>0\}}\, dxdy\end{aligned}$$

il che prova che, sotto $\mathbb{Q}$, la coppia $(X, Y)$ è assolutamente continua rispetto a $\mathrm{Leb}_2$ ed ha densità

$$p^{\mathbb{Q}}_{X,Y}(x,y) = \alpha_f e^{-f(x)-x}\mathbf{1}_{\{x>0\}} \cdot \alpha_g e^{-g(y)-y}\mathbf{1}_{\{y>0\}} \equiv \psi_1(x)\psi_2(y).$$

Allora, sotto $\mathbb{Q}$, $X$ e $Y$ rimangono indipendenti ed hanno densità rispettivamente

$$p^{\mathbb{Q}}_X(x) = \alpha_f e^{-f(x)-x}\mathbf{1}_{\{x>0\}} \quad \text{e} \quad p^{\mathbb{Q}}_Y(y) = \alpha_g e^{-g(y)-y}\mathbf{1}_{\{y>0\}}.$$

Ma, in generale, non sono identicamente distribuite, a meno che $f(x) = g(x)$ per q.o. $x$.

**c)** Le v.a. $U_k = e^{-f(X_k)-g(Y_k)}$ sono ovviamente i.i.d. sotto $\mathbb{P}$. Inoltre,

$$\mathbb{E}(U_k) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{c_{f,g}} Z\Big) = c^{-1}_{f,g}.$$

La tesi quindi segue dalla LFGN una volta verificato che $U_k \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. E infatti,

$$\mathbb{E}(|U_k|^2) = \mathbb{E}\Big(\underbrace{e^{-2f(X_k)-2g(Y_k)}}_{\leq 1}\Big) \leq 1.$$

Infine, essendo $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ si ha

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega\,:\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k(\omega) \not\to c_{f,g}^{-1}\Big\}\Big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Q}\Big(\Big\{\omega\,:\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k(\omega) \not\to c_{f,g}^{-1}\Big\}\Big) = 0$$

e quindi la convergenza è vera anche $\mathbb{Q}$-q.c.

**Esercizio 2. a)** Per $\theta \in \mathbb{R}^d$, si ha

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_n}(\theta) &= \mathbb{E}(e^{i\langle\theta,X_n\rangle}) = \mathbb{E}(e^{i\langle\theta,(2Z_n-1)Y_n\rangle}) \\
&= \mathbb{E}(e^{i\langle\theta,(2Z_n-1)Y_n\rangle}\mathbf{1}_{\{Z_n=0\}}) + \mathbb{E}(e^{i\langle\theta,(2Z_n-1)Y_n\rangle}\mathbf{1}_{\{Z_n=1\}}) \\
&= \mathbb{E}(e^{-i\langle\theta,Y_n\rangle})\mathbb{P}(Z_n=0) + \mathbb{E}(e^{i\langle\theta,Y_n\rangle})\mathbb{P}(Z_n=1) \\
&= \varphi_{Y_n}(-\theta)(1-p_n) + \varphi_{Y_n}(\theta)p_n \\
&= e^{-\frac{1}{2n}\langle C\theta,\theta\rangle}\Big(e^{-i\langle\theta,m\rangle}(1-p_n) + e^{i\langle\theta,m\rangle}p_n\Big)
\end{aligned}$$

Dunque,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{X_n}(\theta) = (1-p)e^{-i\langle\theta,m\rangle} + pe^{i\langle\theta,m\rangle} =: \varphi(\theta), \quad \forall\theta\in\mathbb{R}^d.$$

Ora, $\varphi$ è continua in 0, dunque è la f.c. di una v.a. $X$. Osserviamo che per $c \in \mathbb{R}^d$, $e^{i\langle\theta,c\rangle}$ è la f.c. della legge $\delta_{\{c\}}$ e $\varphi$ è una combinazione lineare convessa di f.c. di questo tipo. Quindi, $\varphi$ è la f.c. della misura di probabilità

$$\mu = (1-p)\delta_{\{-m\}} + p\delta_{\{m\}}$$

da cui segue che $\mathbb{P}(X=m) = p = 1-\mathbb{P}(X=-m)$.

**b)** Se $m=0$ allora $X=0$ q.c. e quindi $X_n \to 0$ anche in probabilità. Ovviamente, 0 è il candidato limite anche per la convergenza in $L^p$ e la convergenza q.c.
Cominciamo con la convergenza in $L^p$. Si ha

$$|X_n|^p = |(2Z_n-1)Y_n|^p = \underbrace{|2Z_n-1|^p}_{=1}|Y_n|^p = |Y_n|^p.$$

Sia $A \in$Mat$(d\times d)$ simmetrica t.c. $A^2 = C$. Allora, $Y_n \overset{\mathscr{L}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}AZ$, con $Z \sim \mathrm{N}(0, I_{d\times d})$ e quindi

$$\mathbb{E}\big(|X_n|^p\big) = \mathbb{E}\big(|Y_n|^p\big) = \mathbb{E}\Big(\big|\frac{1}{\sqrt{n}}AZ\big|^p\Big) = \frac{1}{n^{p/2}}\mathbb{E}(|AZ|^p) = \frac{C_p}{n^{p/2}}$$

dove si è posto $C_p = \mathbb{E}(|AZ|^p)$. Osserviamo che $C_p$ è una costante non negativa e finita:

$$C_p = \mathbb{E}(|AZ|^p) \le \mathbb{E}((\|A\|\cdot|Z|)^p) \le \|A\|^p\sum_{k=1}^{d}\mathbb{E}(|Z_k|^p) = d\alpha_p\|A\|^p$$

dove $\alpha_p = \mathbb{E}(|Z|^p) < \infty$ con $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Dunque, ricapitolando si ha

$$\mathbb{E}\big(|X_n|^p\big) = const\cdot\frac{1}{n^{p/2}} \to 0$$

da cui segue che $X_n \to 0$ in $L^p$ per ogni $p$.

Studiamo ora la convergenza q.c. a 0. Fissato $\varepsilon > 0$, usando la disuguaglianza di Markov si ha

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_n|^p)}{\varepsilon^p} = const \cdot \frac{1}{\varepsilon^p\, n^{p/2}}$$

per ogni $p \geq 1$. Scelto $p > 2$, $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$ ed usando il BC1 si ottiene che $X_n \to 0$ q.c.

**Esercizio 3. a)** Ricordiamo che se $X \sim$Exp$(\lambda)$ allora, per $M > 0$, $\mathbb{P}(X > M) = e^{-\lambda M}$. Supponiamo $\alpha_n \to 0$. Allora,

$$\mu_n([-M, M]^c) = \alpha_n \rho_n([-M, M]^c) + \beta_n \nu_n([-M, M]^c) + (1 - \alpha_n - \beta_n)\delta_{\{1\}}([-M, M]^c).$$

Preso $M > 1$,

$$\mu_n([-M, M]^c) = \alpha_n e^{-M/n} + \underbrace{\beta_n}_{\leq 1} e^{-nM} \leq \alpha_n + e^{-nM}.$$

Preso $\varepsilon > 0$ esiste $n_0$ t.c. per ogni $n > n_0$ si ha $\alpha_n \leq \varepsilon/2$ e $e^{-nM} \leq \varepsilon/2$ e quindi $\mu_n([-M, M]^c) \leq \varepsilon$, da cui la tesi.

Viceversa, sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che $\mu_n([-M, M]^c) \leq \varepsilon$ per ogni $n$. Allora,

$$\varepsilon \geq \mu_n([-M, M]^c) \geq \alpha_n \rho_n([-M, M]^c) = \alpha_n e^{-M/n}.$$

Quindi, $\alpha_n \leq \varepsilon e^{M/n}$ per ogni $n$ ed allora

$$0 \leq \limsup_n \alpha_n \leq \varepsilon.$$

Poiché $\varepsilon$ è arbitrario, otteniamo $\alpha_n \to 0$.

**b)** Se $\varphi_n$ denota la f.c. di $\mu_n$, si ha

$$\varphi_n(\theta) = \alpha_n \frac{1/n}{1/n - i\theta} + \beta_n \frac{n}{n - i\theta} + (1 - \alpha_n - \beta_n)e^{i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Quindi, se $\beta_n \to 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(\theta) = e^{i\theta} = \text{f.c. di } \delta_{\{1\}}.$$

Se invece $\beta_n \to 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(\theta) = 1 = \text{f.c. di } \delta_{\{0\}}.$$

Quindi, non è vero che esiste $\mu$ tale che $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

---

# 6 Soluzioni - II Esonero a.a. 2009/2010

**Esercizio 1. a)** Si ha

$$\mathbb{E}(X \mid Y) - \mathbb{E}(X \mid Z) = \varphi_1(Y) - \varphi_2(Z)$$

dove $\varphi_1$ e $\varphi_2$ sono boreliane su $\mathbb{R}$. Essendo $\varphi(y, z) = \varphi_1(y) - \varphi_2(z)$ boreliana su $\mathbb{R}^2$, segue che e $\varphi(Y, Z) = \varphi_1(Y) - \varphi_2(Z)$ è $\sigma(Y, Z)$-misurabile.

**b)** Osserviamo che, per ogni $\Gamma \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$,

$$\mathbf{1}_{(Y,Z)\in\Gamma} \overset{\text{q.c.}}{=} \mathbf{1}_{(Y,Y)\in\Gamma} \overset{\text{q.c.}}{=} \mathbf{1}_{(Z,Z)\in\Gamma}$$

Inoltre, $\{(Y, Y) \in \Gamma\} \in \sigma(Y)$ e $\{(Z, Z) \in \Gamma\} \in \sigma(Z)$. Infatti, $\{(Y, Y) \in \Gamma\} = \{Y \in \Gamma_1\}$ dove $\Gamma_1 = \{y : (y, y) \in \Gamma\} = \psi^{-1}(\Gamma)$, con $\psi(y) = (y, y)$, e $\Gamma_1 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ perché controimmagine di $\Gamma \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ della funzione continua $\psi$.
Allora,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \mid Y)\mathbf{1}_{\{(Y,Z)\in\Gamma\}}\Big) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \mid Y)\underbrace{\mathbf{1}_{\{(Y,Y)\in\Gamma\}}}_{\in\sigma(Z)}\Big) = \mathbb{E}\Big(X \underbrace{\mathbf{1}_{\{(Y,Y)\in\Gamma\}}}_{=\mathbf{1}_{\{(Z,Z)\in\Gamma\}}\text{ q.c.}}\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(X\underbrace{\mathbf{1}_{\{(Z,Z)\in\Gamma\}}}_{\in\sigma(Z)}\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \mid Z) \underbrace{\mathbf{1}_{\{(Z,Z)\in\Gamma\}}}_{=\mathbf{1}_{\{(Y,Z)\in\Gamma\}}\text{ q.c.}}\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \mid Z)\mathbf{1}_{\{(Y,Z)\in\Gamma\}}\Big)
\end{aligned}$$

**c)** Posto $W = \mathbb{E}(X \mid Y) - \mathbb{E}(X \mid Z)$, si ha che $W$ è $\mathscr{G} = \sigma(Y, Z)$-misurabile e per ogni $\Gamma \in \mathscr{G}$, $\mathbb{E}(W\mathbf{1}_\Gamma) = 0$. Ma allora dev'essere necessariamente $W = 0$ q.c.

**Esercizio 2. a)** $X_n$ è $\mathscr{F}_n$-misurabile, integrabile (assume un numero finito di valori) e

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(\underbrace{X_n}_{\mathscr{F}_n\text{-mis}} \overbrace{\rho^{Y_{n+1}}}^{\text{indip. da } \mathscr{F}_n} \mid \mathscr{F}_n) = X_n \underbrace{\mathbb{E}(\rho^{Y_{n+1}})}_{=1} = X_n.$$

Essendo poi una martingala positiva, è limitata in $L^1$, quindi converge q.c. ad una v.a. in $L^1$. La LFGN assicura che $\frac{1}{n}S_n \to \mathbb{E}(Y_1) = p - q < 0$ q.c. per $n \to \infty$, quindi $S_n \to -\infty$ ed allora $X_n \to 0$ q.c.

**b)** Poiché

$$\{\tau_\ell > n\} = \{S_1 \le \ell, \dots, S_n \le \ell\} = \cap_{k=1}^n \{S_k \le \ell\} \in \mathscr{F}_n$$

segue subito che $\tau_\ell$ è un $\mathscr{F}_n$-t.a. Quindi $X_n^\ell = X_{\tau_\ell \wedge n}$ definisce una martingala che per di più è limitata. Infatti,

$$0 \le X_n^\ell = X_{\tau_\ell\wedge n} = \rho^{S_{\tau_\ell\wedge n}} \le \rho^\ell$$

perché $S_{\tau_\ell\wedge n} \le \ell$ e $\rho > 1$. Quindi, $\{X_n^\ell\}_n$ converge q.c. e in $L^p$ per ogni $p \ge 1$. Ora,

$$X_n^\ell = \rho^{S_{\tau_\ell\wedge n}} = \rho^{S_{\tau_\ell}}\mathbf{1}_{\{\tau_\ell\le n\}} + \rho^{S_n}\mathbf{1}_{\{\tau_\ell>n\}} = \rho^\ell\mathbf{1}_{\{\tau_\ell\le n\}} + \rho^{S_n}\mathbf{1}_{\{\tau_\ell>n\}} \to \rho^\ell\mathbf{1}_{\{\tau_\ell<+\infty\}} \quad \text{q.c.}$$

perché $\rho^{S_n} \to 0$ q.c. Ma allora, $W = \rho^\ell \mathbf{1}_{\{\tau_\ell < +\infty\}}$ è anche il limite in $L^1$.

**c)** Poiché $X_n^\ell \to \rho^\ell \mathbf{1}_{\{\tau_\ell < +\infty\}}$ in $L^1$, si ha

$$\mathbb{E}(\rho^\ell \mathbf{1}_{\{\tau_\ell < +\infty\}}) = \lim_n \mathbb{E}(X_n^\ell).$$

Per la proprietà di martingala, $\mathbb{E}(X_n^\ell) = \mathbb{E}(X_0^\ell) = 1$, il che dà $\mathbb{E}(\rho^\ell \mathbf{1}_{\{\tau_\ell < +\infty\}}) = 1$ e quindi

$$\mathbb{P}(\tau_\ell < +\infty) = \rho^{-\ell}.$$

**d)** Per $k = 0, 1, \dots$, $\{Z < k\} = \cap_n \{S_n < k\} = \{\tau_k = +\infty\}$, quindi $\mathbb{P}(Z < k) = 1 - \mathbb{P}(\tau_k < +\infty) = 1 - \rho^{-k}$. Dunque,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z < k+1) - \mathbb{P}(Z < k) = 1 - \rho^{-k-1} - 1 + \rho^{-k} = \alpha_\rho^k (1 - \alpha_\rho)$$

avendo posto $1 - \alpha_\rho = \rho^{-1}$, da cui la tesi.

---

## 7 Soluzioni - Scritto, I Appello I Sessione a.a. 2009/2010

**Esercizio 1. a)** La verifica che $\mathbb{Q}$ è una misura è immediata (cfr. corso). Poi, $\mathbb{Q}(\Omega) = 2\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X^+) = 2 \cdot 1/2 = 1$ perché $X$ è simmetrica, quindi $\mathbb{Q}$ è una misura di probabilità. Infine, per $A \in \mathscr{F}$, $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(2X^+) = \int_A 2X^+ \, d\mathbb{P}$, quindi

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = 2X^+.$$

**b)** Falso: posto $A = \{X < 0\}$, si ha

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(2 \underbrace{X^+ \mathbf{1}_{\{X<0\}}}_{= 0 \text{ q.c.}}) = 0 \text{ ma } \mathbb{P}(A) = 1/2 > 0.$$

**c)** Poiché $X^+ = X\mathbf{1}_{\{X>0\}}$, si ha

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(f(X^-)) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(f(X^-)2X^+) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(f(X^-)2X\mathbf{1}_{\{X>0\}}).$$

Ma su $\{X > 0\}$ si ha $X^- = 0$, quindi

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(f(X^-)) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(f(0)2X\mathbf{1}_{\{X>0\}}) = f(0)\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(2X\mathbf{1}_{\{X>0\}}) = f(0)\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(2X^+) = f(0).$$

**d)** Ovviamente $g(X^+)$ è $\sigma(X^+)$-misurabile. Mostriamo che è integrabile sotto $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} |g(X^+)| &= |g(X^+)|\mathbf{1}_{\{X>0\}} + |g(X^+)|\mathbf{1}_{\{X\le 0\}} = |g(X)|\mathbf{1}_{\{X>0\}} + |g(0)|\mathbf{1}_{\{X\le 0\}} \\ &\le |g(X)| + |g(0)| \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Mostriamo ora che per ogni $G \in \sigma(X^+)$ si ha $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(g(X^+)\mathbf{1}_G) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(g(X)\mathbf{1}_G)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(g(X^+)\mathbf{1}_G) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(g(X^+)2X^+\mathbf{1}_G) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(g(X^+)2X\mathbf{1}_{\{X>0\}}\mathbf{1}_G) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(g(X)2X\mathbf{1}_{\{X>0\}}\mathbf{1}_G) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(g(X)2X^+\mathbf{1}_G) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(g(X)\mathbf{1}_G)
\end{aligned}$$

da cui la tesi.

**Esercizio 2. a)** Si ha

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_n}(\theta) &= \mathbb{E}(e^{i\theta Z_n X}) = \mathbb{E}(e^{i\theta Z_n X}\mathbf{1}_{\{Z_n=+1/n\}}) + \mathbb{E}(e^{i\theta Z_n X}\mathbf{1}_{\{Z_n=-1/n\}}) \\
&= \mathbb{E}(e^{i\theta X/n}\mathbf{1}_{\{Z_n=+1/n\}}) + \mathbb{E}(e^{-i\theta X/n}\mathbf{1}_{\{Z_n=-1/n\}}) \\
&= \mathbb{E}(e^{i\theta X/n})\mathbb{P}(Z_n = +1/n) + \mathbb{E}(e^{-i\theta X/n})\mathbb{P}(Z_n = -1/n) \\
&= \varphi_X\big(\theta/n\big)p_n + \varphi_X\big(-\theta/n\big)(1-p_n)
\end{aligned}$$

**b)** Ricordando che $\varphi_X(t) \to \varphi_X(0) = 1$ per $t \to 0$, si ha

$$\varphi_{Y_n}(\theta) = \underbrace{p_n}_{\in[0,1]}\Big(\underbrace{\varphi_X\big(\theta/n\big) - \varphi_X\big(-\theta/n\big)}_{\to 0}\Big) + \underbrace{\varphi_X\big(-\theta/n\big)}_{\to 1} \to 1$$

e la funzione caratteristica di $Y = 0$ q.c. è proprio $\varphi_0(\theta) \equiv 1$. Allora, $Y_n \to 0$ in legge e quindi (il limite è deterministico!) in probabilità. Studiamo ora la convergenza in $L^p$. Essendo $Z_n$ limitata ed indipendente da $X$, $Z_nX \in L^p$ se e solo se $X \in L^p$ e in tal caso $|Y_n| = |Z_nX|^p = \frac{1}{n^p}|X|^p$. Quindi $Y_n \to 0$ anche in $L^p$ purché però si abbia $X \in L^p$. Infine, essendo $|Y_n| = |Z_nX| = \frac{1}{n}|X|$ q.c., la convergenza avviene anche q.c.

**Esercizio 3. a)** $S_n$ è $\mathscr{F}_n$-misurabile e $Y_n$ è una funzione boreliana di $S_n$, quindi $\mathscr{F}_n$-misurabile. Inoltre,

$$\mathbb{E}(|Y_n|) = \mathbb{E}(e^{S_n}) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(e^{X_k}).$$

Ma

$$\mathbb{E}(e^{X_k}) = e^{+1}p + e^{-1}(1-p) = 1$$

quindi $Y_n \in L^1$ per ogni $n$. Infine,

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(\overbrace{Y_n}^{\mathscr{F}_n\text{-mis.}} \underbrace{e^{X_{n+1}}}_{\text{ind. da } \mathscr{F}_n} \,|\, \mathscr{F}_n) = Y_n\mathbb{E}(e^{X_{n+1}}) = Y_n$$

quindi $\{Y_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala. Ora, $Y_n \geq 0$ per ogni $n$ e $\{Y_n\}_n$ è ovviamente limitata in $L^1$. Quindi, per il teorema di convergenza q.c. per martingale, esiste il limite q.c. e tale limite è in $L^1$. Osserviamo che

$$Y_n = \exp\big(n \cdot \frac{1}{n}S_n\big)$$

e per la LFGN, $\frac{1}{n}S_n \to \mathbb{E}(X_1) = p - (1-p) = 1 - 2p < 0$ q.c. per $n \to \infty$. Ma allora, $S_n \to -\infty$ q.c. e quindi $Y_n \to 0$ q.c. Tale convergenza non è vera in $L^1$: se così fosse, si dovrebbe avere $1 \equiv \mathbb{E}(Y_n) \to \mathbb{E}(0) = 0$, il che è falso.

**b)** Si ha

$$\{\tau > n\} = \{X_1 = -1, \dots, X_n = -1\} = \{X_1 = -1\} \cap \cdots \{X_n = -1\} \in \mathscr{F}_n$$

quindi $\tau$ è un $\mathscr{F}_n$-t.a. Inoltre, essendo le $X_k$ indipendenti,

$$\mathbb{P}(\tau > N) = \mathbb{P}(X_1 = -1) \cdots \mathbb{P}(X_N = -1) = (1-p)^N \to 0 \text{ per } N \to \infty,$$

dunque $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. Mostriamo la limitatezza di $\{Y_n^\tau\}_n$. Si ha

$$0 \leq Y_n^\tau = Y_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} + Y_n \mathbf{1}_{\{\tau > n\}}.$$

Osserviamo che $X_1 = \cdots = X_{\tau-1} = -1$ e $X_\tau = +1$, quindi $Y_\tau = e^{-1(\tau-1)+1} = e^{-\tau+2}$. Inoltre, su $\{\tau > n\}$ si ha $X_1 = \cdots = X_n = -1$, quindi $Y_n = e^{-n}$. Quindi,

$$0 \leq Y_n^\tau = e^{-\tau+2}\mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} + e^{-n}\mathbf{1}_{\{\tau > n\}} \leq e^2 + 1.$$

**c)** Sappiamo che $\{Y_n^\tau\}_n$ è una martingala, quindi ne studieremo la convergenza usando i risultati che riguardano le martingale.
Poiché la martingala $\{Y_n^\tau\}_n$ è limitata, è limitata in $L^p$ per ogni $p \geq 1$, e quindi converge q.c. ed in $L^p$ ad una v.a. $Z$. Ora,

$$Y_n^\tau = e^{-\tau+2}\underbrace{\mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}}}_{\to 1 \text{ q.c.}} + \underbrace{e^{-n}\mathbf{1}_{\{\tau > n\}}}_{\to 0 \text{ q.c.}} \to e^{-\tau+2} \text{ q.c.}$$

il che dà $Z = e^{-\tau+2}$. Poiché tale convergenza è vera anche in $L^1$, dev'essere $\mathbb{E}(Y_n^\tau) \to \mathbb{E}(e^{-\tau+2})$. Ma $\mathbb{E}(Y_n^\tau) = \mathbb{E}(Y_0^\tau) = \mathbb{E}(Y^0) = 1$, e quindi

$$\mathbb{E}(e^{-\tau+2}) = 1$$

o equivalentemente $\mathbb{E}(e^{-\tau}) = e^{-2}$.

---

## 8 Soluzioni - Scritto, II Appello I Sessione a.a. 2009/2010

**Esercizio 1. a)** Dev'essere $c > 0$ e $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(c\, e^{-X^2}) = 1$. Dunque,

$$c^{-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{-X^2}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-3x^2/2}}{\sqrt{2\pi/3}}\,dx}_{=1}$$

da cui si ottiene $c=\sqrt{3}$. Poi, si ha

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{X^2}) = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2}\,\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = +\infty$$

quindi $e^{X^2} \notin L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Infine,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{X^2}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big(e^{X^2}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big) = \sqrt{3}$$

e quindi $e^{X^2} \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$.

**b1)** Per ogni $n$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{Q}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{X_1\in A_1}\cdots \mathbf{1}_{X_n\in A_n}) = \sqrt{3}\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{X_1\in A_1}\cdots \mathbf{1}_{X_n\in A_n}e^{-X^2})$$

Ma $X_1, \dots, X_n, X$ sono indipendenti sotto $\mathbb{P}$, quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) &= \sqrt{3}\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{X_1\in A_1})\cdots \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{X_n\in A_n})\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{-X^2})\\ &= \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\cdots \mathbb{P}(X_n \in A_n).\end{aligned}$$

Scelto poi $A_\ell = \mathbb{R}$ per ogni $\ell \neq i$, si ottiene

$$\mathbb{Q}(X_i \in A_i) = \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

e quindi

$$\mathbb{Q}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\cdots \mathbb{P}(X_n \in A_n) = \mathbb{Q}(X_1 \in A_1)\cdots \mathbb{Q}(X_n \in A_n).$$

Ciò prova che 1) le $X_n$ sono indipendenti anche sotto $\mathbb{Q}$ e 2) la legge sotto $\mathbb{Q}$ coincide con quella che hanno sotto $\mathbb{P}$. Quindi, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X_n) = 0$ e $\mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}(X_n) = 2$.

**b2)** Dal TLC si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}\Big(\sum_{k=1}^n X_k > \sqrt{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}\Big(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}} > 1\Big) = \mathbb{P}(\sqrt{2}Z > 1)$$

dove $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Quindi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}(\sum_{k=1}^n X_k > \sqrt{n}) = 1 - \Phi(1/\sqrt{2})$, dove $\Phi$ denota la f.d. di una gaussiana standard.

**Esercizio 2. a)** Per $M > 0$ si ha

$$\Lambda_n([-M,M]) = p_n\delta_{\{n\}}([-M,M]) + (1-p_n)\frac{\mu([-M,M]\cap K_n)}{\mu(K_n)}.$$

Preso $M > 1$, per ogni $n > M$ si ha

$$\Lambda_n([-M,M]) = 1 - p_n$$

da cui segue che $\{\Lambda_n\}_n$ è tight se e solo se $p_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

**b)** Preso $\varepsilon > 0$, si ha

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(|X_n| \le \varepsilon) = 1 - \Lambda_n([-\varepsilon, \varepsilon]).$$

Ma per $n > \varepsilon$ e $n > 1/\varepsilon$,

$$\Lambda_n([-\varepsilon, \varepsilon]) = 1 - \frac{1}{n^2}$$

e quindi $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{n^2} \to 0$ quando $n \to \infty$, e dunque $X_n \to 0$ in probabilità. Inoltre, poiché $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$, $X_n \to 0$ anche q.c. Ovviamente, tale convergenza vale in legge. Infine,

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = \int_{\mathbb{R}} |x|^p \Big( \frac{1}{n^2} \delta_{\{n\}}(dx) + \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) \mathbf{1}_{[-1/n, 1/n]}(x) \frac{1}{\mu([-1/n, 1/n])} \mu(dx) \Big)$$

Ma

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p \delta_{\{n\}}(dx) = n^p$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p \mathbf{1}_{[-1/n, 1/n]}(x) \frac{1}{\mu([-1/n, 1/n])} \mu(dx) = \int_{-1/n}^{1/n} |x|^p \frac{1}{\mu([-1/n, 1/n])} \mu(dx) \le \frac{1}{n^p}$$

da cui

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = n^{p-2} + \mathcal{O}(1)$$

dove $\mathcal{O}(1)$ denota una quantità che va a 0 per $n \to \infty$. Quindi $X_n \to 0$ in $L^p$ se e solo se $p < 2$.

**Esercizio 3. a)** Per ogni $n$, $X_n$ è integrabile (perché prodotto di v.a. indipendenti ed integrabili) e $\mathscr{F}_n$-misurabile (perché prodotto di v.a. $\mathscr{F}_n$-misurabili). Poi,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}( \underbrace{X_n}_{\mathscr{F}_n\text{-mis.}} \cdot ( \underbrace{Y_{n+1} + 1}_{\text{indip. da } \mathscr{F}_n} ) \,|\, \mathscr{F}_n) = X_n \underbrace{\mathbb{E}(Y_{n+1} + 1)}_{=1} = X_n$$

quindi $\{X_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala.

**b)** Fissato $n$,

$$\begin{aligned} \{\tau = n\} &= \{Y_0 \ne -1, \dots, Y_{n-1} \ne -1, Y_n = -1\} \\ &= \underbrace{\{Y_0 \ne -1\}}_{\in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_n} \bigcap \dots \bigcap \underbrace{\{Y_{n-1} \ne -1\}}_{\in \mathscr{F}_{n-1} \subset \mathscr{F}_n} \underbrace{\bigcap \{Y_n = -1\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n \end{aligned}$$

e quindi $\tau$ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto. Inoltre,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau > N) &= \mathbb{P}(Y_0 \ne -1, \dots, Y_{N-1} \ne -1, Y_N \ne -1) \\ &= \Big(\mathbb{P}(Y_0 \ne -1)\Big)^{N+1} = \Big(\frac{3}{4}\Big)^{N+1} \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

dunque è q.c. finito. Ora, q.c. si ha

$$X_\tau = X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} = \sum_{n=0}^{\infty} X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}$$

Su $\{\tau = n\}$ si ha $Y_n = -1$. Quindi $X_n = X_{n-1}(Y_n + 1) = 0$ e di conseguenza $X_\tau = 0$ q.c.

**c)** Poiché $\tau$ è q.c. finito, quando $n \to \infty$ si ha $\tau \wedge n \to \tau$ q.c. e quindi $X_{\tau\wedge n} \to X_\tau = 0$ q.c. Ma la convergenza non avviene in $L^1$: se così fosse, si avrebbe $\mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) \to \mathbb{E}(X_\tau) = 0$, il che è falso perché, per il teorema d'arresto, $\mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(Y_0) = 1$ per ogni $n$.

## 9 Soluzioni - I Esonero a.a. 2010/2011

**Esercizio 1. a)** Per $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \in A) &= \mathbb{P}(Y \in A, |X| \le 1) + \mathbb{P}(Y \in A, |X| > 1) \\
&= \mathbb{P}(X \in A, |X| \le 1) + \mathbb{P}(-X \in A, |X| > 1) \\
&= \int_{A\cap\{|x|\le 1\}} p(x)dx + \underbrace{\int_{-A\cap\{|x|>1\}} p(x)dx}_{\text{sost.}:x=-\xi} \\
&= \int_{A\cap\{|x|\le 1\}} p(x)dx + \int_{A\cap\{|\xi|>1\}} \underbrace{p(-\xi)}_{=p(\xi)}\, d\xi \\
&= \int_{A\cap\{|x|\le 1\}} p(x)dx + \int_{A\cap\{|x|>1\}} p(x)dx = \int_A p(x)dx = \mathbb{P}(X \in A).
\end{aligned}$$

Inoltre, $X$ e $Y$ non sono indipendenti. Infatti, prendiamo ad esempio $A = (1, +\infty)$ e $B = (0, 1)$. Allora, su $\{X \in A\}$ si ha $Y = -X$ e quindi $\{X \in A\} \subset \{Y < -1\}$, da cui si ottiene $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = 0$. Ma, $\mathbb{P}(X \in A) > 0$ e $\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(X \in B) > 0$, da cui evidentemente $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \ne \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.

**b)** Dev'essere $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$, quindi

$$c^{-1} = \mathbb{E}(|X|) = 2\int_0^\infty xe^{-2x}dx = \frac{1}{2}$$

da cui $c = 2$.

**c)** Ovviamente $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$: se $\mathbb{P}(A) = 0$ allora $\mathbf{1}_A = 0$ $\mathbb{P}$-q.c. e quindi $\mathbb{Q}(A) = 0$. E si ha

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = 2|X|.$$

Poi, essendo $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = 2|X| > 0$ $\mathbb{P}$-q.c. e quindi $\mathbb{Q}$-q.c. si ottiene immediatamente che $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ e

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \Big(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big)^{-1} = \frac{1}{2|X|}.$$

**d)** Si ha $|Y| = |X| > 0$ q.c. da cui $|Y^{-1}| = |X|^{-1}$ e quindi

$$\mathbb{E}(|Y^{-1}|^p) = \mathbb{E}(|X|^{-p}) = 2\int_0^\infty \frac{1}{x^p} e^{-2x}\, dx.$$

Ora, per ogni $p \geq 1$, $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ non è integrabile in un intorno dell'origine, quindi $Y^{-1} \notin L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ per ogni $p \geq 1$. Infine, $Y^{-1} \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ se e solo se $Y^{-p}|X| \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Ma $|Y^{-p}||X| = |X|^{-p+1}$, che è $\mathbb{P}$-integrabile se e solo se $2 - p > 0$. Dunque, $Y^{-1} \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ per ogni $p \in [1, 2)$.

**Esercizio 2.** Poniamo

$$U_n = \log Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log Y_i.$$

Ora, la successione $\{\log Y_n\}_n$ è fatta da v.a. i.i.d. di quadrato integrabile, quindi per la LFGN,

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log Y_i \to \mathbb{E}(\log Y_1) \quad \text{q.c. quando } n \to \infty.$$

Essendo poi $g(x) = e^x$ una funzione continua, otteniamo

$$Z_n = e^{U_n} \to c = e^{\mathbb{E}(\log Y_1)} \quad \text{q.c. quando } n \to \infty.$$

Per dimostrare che $c \leq \mathbb{E}(Y_1)$ usiamo la disuguaglianza di Jensen: la funzione $\psi(y) = \log y$ è una funzione concava su $(0, +\infty)$ e $\mathbb{P}(Y_1 > 0) = 1$, quindi $\mathbb{E}(\log Y_1) \leq \log \mathbb{E}(Y_1)$. Dunque, $c = e^{\mathbb{E}(\log Y_1)} \leq e^{\log \mathbb{E}(Y_1)} = \mathbb{E}(Y_1)$.

**Esercizio 3.** Cominciamo dalla convergenza debole, studiando il comportamento asintotico della f.r. Per $t < 1$ si ha $F_n(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) = 0$ e per $t \geq 1$,

$$F_n(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) = \mathbb{P}(Y_n \leq \log t) = 1 - \left(\frac{1}{t}\right)^n.$$

Allora, $F_n(t) \to F(t)$ per ogni $t \neq 1$, dove $F$ è la f.r. di $X = 1$ q.c. Quindi, $X_n \to 1$ in legge. A titolo di esercizio, usiamo anche la tecnica delle funzioni caratteristiche:

$$\varphi_n(t) = \int_0^\infty e^{ite^x} n e^{-nx}\, dx = \int_1^\infty e^{it\xi^{1/n}} \frac{1}{\xi^2}\, dx$$

dove nella seconda uguaglianza si è usata la sostituzione $\xi = e^{nx}$. Ora, per $n \to \infty$, $e^{it\xi^{1/n}} \frac{1}{\xi^2} \mathbf{1}_{\{\xi>1\}} \to e^{it} \frac{1}{\xi^2} \mathbf{1}_{\{\xi>1\}}$ ed inoltre $|e^{it\xi^{1/n}} \frac{1}{\xi^2} \mathbf{1}_{\{\xi>1\}}| \leq \frac{1}{\xi^2} \mathbf{1}_{\{\xi>1\}}$, che è integrabile su $\mathbb{R}$, quindi usando DOM

$$\lim_n \varphi_n(t) = e^{it} \int_1^\infty \frac{1}{\xi^2}\, dx = e^{it}$$

e quest'ultima è la funzione caratteristica della massa di Dirac in 1, quindi $X_n \to 1$ in legge. La convergenza in probabilità è garantita dal fatto che la v.a. limite in legge è costante. Studiamo la convergenza q.c. Per $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{Y_n} > 1 + \varepsilon) = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^n$$

e $\sum_n \mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) < \infty$ per ogni $\varepsilon > 0$, da cui si ottiene $X_n \to 1$ q.c. Studiamo ora la convergenza in $L^p$ con $p \geq 1$. Sia $K_p = [p] + 1$. Allora,

$$\mathbb{E}((e^{Y_n} - 1)^{K_p}) = \sum_{j=0}^{K_p} \begin{pmatrix} K_p \\ j \end{pmatrix} \mathbb{E}(e^{jY_n}(-1)^{K_p - j}) = \sum_{j=0}^{K_p} \begin{pmatrix} K_p \\ j \end{pmatrix} (-1)^{K_p - j} \int_0^\infty n e^{jx - nx} dx$$

Quindi, per $n > K_p$,

$$\mathbb{E}(|X_n - 1|^{K_p}) \leq \sum_{j=0}^{K_p} \begin{pmatrix} K_p \\ j \end{pmatrix} (-1)^{K_p - j} \frac{n}{n-j}.$$

Passando al limite,

$$\limsup_n \mathbb{E}(|X_n - 1|^{K_p}) \leq \sum_{j=0}^{K_p} \begin{pmatrix} K_p \\ j \end{pmatrix} (-1)^{K_p - j} = (1-1)^{K_p} = 0.$$

Dunque, $X_n \to 1$ in $L^p$ per ogni $p \geq 1$.

---

# 10 Soluzioni - II Esonero a.a. 2010/2011

**Esercizio 1.** Sia $Y = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X \,|\, \mathscr{G})$. $Y$ è ovviamente $\mathscr{G}$-misurabile ed è anche $\mathbb{Q}$-integrabile perchè

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|Y|) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(|\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X \,|\, \mathscr{G})|\big) \\ &\overset{(a)}{\leq} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(|X| \,|\, \mathscr{G})\big) \overset{(b)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(|X| \,|\, \mathscr{G}) Z\big) \overset{(c)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(|X| Z) \overset{(d)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|X|) < \infty \end{aligned}$$

dove: $(a)$ viene dalla stima $|\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X \,|\, \mathscr{G})| \leq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(|X| \,|\, \mathscr{G})$; $(b)$ è la relazione tra $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ e $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ quando $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$; $(c)$ segue dal fatto che $Z$ è $\mathscr{G}$-misurabile e la media coincide con la media della media condizionale; $(d)$ ancora la relazione tra $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ e $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ quando $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.
Inoltre, per $A \in \mathscr{G}$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Y \mathbf{1}_A) &\overset{(1)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X \,|\, \mathscr{G}) \mathbf{1}_A\Big) \overset{(2)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X \,|\, \mathscr{G}) \mathbf{1}_A \, Z\Big) \\ &\overset{(3)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(XZ\,\mathbf{1}_A \,\big|\, \mathscr{G}\big)\Big) \overset{(4)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(XZ\,\mathbf{1}_A) \overset{(5)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X\,\mathbf{1}_A) \end{aligned}$$

dove: (1) segue dalla definizione di $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X \,|\, \mathscr{G})$; (2) è la relazione tra $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ e $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ quando $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$; (3) $Z\mathbf{1}_A$ è $\mathscr{G}$-misurabile e $XZ \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ perché $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$; (4) la media coincide con la media della media condizionale; (5) ancora la relazione tra $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ e $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ quando $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.

Segue quindi che $Y = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X \,|\, \mathscr{G})$, $\mathbb{Q}$-q.c.

**Esercizio 2.** Per $n \geq 0$, poniamo $M_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X_k$ e $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$. $M_n$ è ovviamente $\mathscr{F}_n$-misurabile ed integrabile. Inoltre,

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(\underbrace{M_n}_{\mathscr{F}_n\text{-mis.}} + \alpha_{n+1} \underbrace{X_{n+1}}_{\perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_n} \,|\, \mathscr{F}_n) = M_n + \alpha_{n+1} \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1})}_{=0} = M_n.$$

Dunque, $\{M_n\}_n$ è una $\mathscr{F}_n$-mg. Mostriamo che è limitata in $L^2$. Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|M_n|^2) &= \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X_k\Big)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 X_k^2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_k \alpha_j X_k X_j\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \underbrace{\mathbb{E}(X_k^2)}_{=1} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_k \alpha_j \underbrace{\mathbb{E}(X_k X_j)}_{=\mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_j)=0} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \uparrow \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2\end{aligned}$$

e quindi

$$\sup_n \mathbb{E}(|M_n|^2) < \infty.$$

Usando il teorema di convergenza in $L^p$ con $p > 1$, si ha che $M_\infty = \lim_n M_n$ esiste q.c. ed in $L^2$. In particolare quindi

$$\mathbb{E}(M_\infty) = \lim_n \mathbb{E}(M_n) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(M_\infty) = \mathbb{E}(M_\infty^2) = \lim_n \mathbb{E}(M_n^2) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k^2.$$

**Esercizio 3.** Inanzitutto, osserviamo che $\tau$ è un $\mathscr{F}_n$-t.a. Infatti,

$$\{\tau \leq n\} = \underbrace{\{\tau_1 \leq n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau_2 \leq n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n, \quad \forall n.$$

Inoltre, $\tau$ è finito q.c. perché $\{\tau = +\infty\} = \{\tau_1 = +\infty\} \cup \{\tau_2 = +\infty\}$ ed essendo $\mathbb{P}(\tau_1 = +\infty) = 0 = \mathbb{P}(\tau_2 = +\infty)$, si ha $\mathbb{P}(\tau_1 = +\infty) = 0$.
Dunque $\{X_{n\wedge\tau}\}_n$ è la martingala arrestata all'$\mathscr{F}_n$-t.a. $\tau$, che è finito q.c. Poiché $X_{n\wedge\tau} \geq 0$ q.c.,

$$\mathbb{E}(|X_{\tau\wedge n}|) = \mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0),$$

da cui segue che $\{X_{n\wedge\tau}\}_n$ è una martingala limitata in $L^1$. Per il teorema di convergenza q.c. esiste $M \in L^1$ tale che $X_{\tau\wedge n} \to M$ q.c. quando $n \to \infty$. Ma su $\{\tau < \infty\}$, si ha $\lim_{n\to\infty} X_{n\wedge\tau} = X_\tau$. Essendo $\tau < \infty$ q.c. segue immediatamente che $M = X_\tau$ q.c.

## 11 Soluzioni - Scritto, I Appello I Sessione a.a. 2010/2011

**Esercizio 1. a)** Dev'essere $1 = \mathbb{Q}(\Omega)$ e quindi

$$1 = \mathbb{E}(Z) = c\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)^k \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} = c\,e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^k}{k!} = c\,e^{-\lambda+\mu}$$

da cui si ottiene $c = e^{\lambda-\mu}$.
**b)** Ovviamente $X$ assume i valori $k = 0, 1, \dots$ anche sotto $\mathbb{Q}$ e per tali valori si ha

$$\begin{aligned}
\Lambda_X^{\mathbb{Q}}(k) &= \mathbb{Q}(X = k) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{X=k\}}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big(\mathbf{1}_{\{X=k\}}\Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)^X e^{\lambda-\mu}\Big)\\
&= e^{\lambda-\mu}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big(\mathbf{1}_{\{X=k\}}\Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)^k\Big) = e^{\lambda-\mu}\Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)^k\mathbb{P}(X = k)\\
&= e^{\lambda-\mu}\Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)^k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} = \frac{\mu^k}{k!}\,e^{-\mu}.
\end{aligned}$$

Dunque, sotto $\mathbb{Q}$ si ha che $X \sim \mathrm{Po}(\mu)$.
**c)** Per $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(X\in A, Y\in B) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{X\in A, Y\in B\}}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\underbrace{\mathbf{1}_{\{X\in A\}}\mathbf{1}_{\{Y\in B\}}\,Z}_{Z \text{ è } \sigma(X)\text{-mis e } X \perp\!\!\!\perp Y})\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{\{X\in A\}}\,Z)\cdot\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{\{Y\in B\}})}_{Z \perp\!\!\!\perp Y \text{ e } \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z)=1} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{X\in A\}})\cdot\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{\{Y\in B\}}\,Z)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{X\in A\}})\cdot\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{Y\in B\}}) = \mathbb{Q}(X\in A)\mathbb{Q}(Y\in B)
\end{aligned}$$

da cui segue che $X \perp\!\!\!\perp Y$ anche sotto $\mathbb{Q}$.

**Esercizio 2.** È noto che $Y_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ per ogni $n$. Infatti, detta $\varphi_n$ la f.c. di $Y_n$,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &= \mathbb{E}(e^{itY_n}) = \mathbb{E}(e^{itY_n}\mathbf{1}_{\{|X|\le 1/n\}}) + \mathbb{E}(e^{itY_n}\mathbf{1}_{\{|X|>1/n\}})\\
&= \mathbb{E}(e^{itX}\mathbf{1}_{\{|X|\le 1/n\}}) + \underbrace{\mathbb{E}(e^{-itX}\mathbf{1}_{\{|X|>1/n\}})}_{X \text{ e } -X \text{ hanno la stessa legge}}\\
&= \mathbb{E}(e^{itX}\mathbf{1}_{\{|X|\le 1/n\}}) + \mathbb{E}(e^{itX}\mathbf{1}_{\{|-X|>1/n\}})\\
&= \mathbb{E}\big(e^{itX}(\mathbf{1}_{\{|X|\le 1/n\}} + \mathbf{1}_{\{|X|>1/n\}})\big)\\
&= \varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

Dunque, $\{Y_n\}_n$ (banalmente) converge in legge ad una gaussiana standard.
Poi, $\{|X| \le 1/n\} \downarrow \{X = 0\}$ per $n \to \infty$ e quest'ultimo è un insieme di probabilità nulla, dunque $\mathbf{1}_{\{|X|\le 1/n\}} \to 0$ q.c. Di conseguenza, $\mathbf{1}_{\{|X|>1/n\}} \to 1$ q.c. e quindi $Y_n \to -X$ q.c. (ed infatti il limite è una gaussiana standard). La convergenza a $-X$ è anche in

probabilità. Studiamo la convergenza a $-X$ in $L^p$. Usando la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|Y_n + X|^p) &= \mathbb{E}(|X|^p \mathbf{1}_{\{|X|\leq 1/n\}}) \leq \mathbb{E}(|X|^{p\alpha})^{1/\alpha} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{|X|\leq 1/n\}})^{1/\beta} \\ &\leq \mathbb{E}(|X|^{p\alpha})^{1/\alpha} \mathbb{P}(|X| \leq 1/n)^{1/\beta}\end{aligned}$$

dove $\alpha, \beta > 1$ e $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Poiché $\mathbb{E}(|X|^{p\alpha}) < \infty$ per ogni $p, \alpha > 0$ e $\mathbb{P}(|X| \leq 1/n) \to 0$ per $n \to \infty$, otteniamo $Y_n \to -X$ in $L^p$ per ogni $p > 0$.

**Esercizio 3. a)** Per $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, si ha

$$\Lambda_{Y_1}(A) = \Lambda_{X,Y_1}(\mathbb{R} \times A) = \Lambda_{X,Y_2}(\mathbb{R} \times A) = \Lambda_{Y_2}(A).$$

Denoteremo quindi con $\mu$ la misura di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ tale che $\mu = \Lambda_{Y_1} = \Lambda_{Y_2}$.
**b)** Dalla definizione di media condizionale, per ogni $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ si ha

$$\mathbb{E}(\phi_1(Y_1)\mathbf{1}_{\{Y_1 \in A\}}) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{Y_1 \in A\}}) \overset{(*)}{=} \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{Y_2 \in A\}}) = \mathbb{E}(\phi_1(Y_1)\mathbf{1}_{\{Y_2 \in A\}})$$

dove in (*) abbiamo usato il fatto che $\Lambda_{X,Y_1} = \Lambda_{X,Y_2}$. In particolare quindi otteniamo che

$$\int_A \phi_1(x)\mu(dx) = \int_A \phi_2(x)\mu(dx) \text{ per ogni } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

da cui segue che $\phi_1 = \phi_2$ $\mu$-q.c. Infine, per $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\phi_1(Y_1) \in A) &= \mathbb{P}(Y_1 \in \phi_1^{-1}(A)) \\ &= \mu\big(\phi_1^{-1}(A)\big) \overset{(**)}{=} \mu\big(\phi_2^{-1}(A)\big) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 \in \phi_2^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\phi_1(Y_2) \in A)\end{aligned}$$

dove in (**) abbiamo usato che $\phi_1 = \phi_2$ $\mu$-q.c.

**Esercizio 4. a)** $M_n$ è integrabile perché prodotto di v.a. indipendenti e in $L^1$; $M_n$ è $\mathscr{F}_n$-misurabile perché funzione boreliana di $Y_0, \ldots, Y_n$. Poi, essendo $M_{n+1} = M_n \cdot Y_{n+1}$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(\underbrace{M_n}_{\mathscr{F}_n\text{-mis.}} \cdot Y_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = M_n \cdot \mathbb{E}(\underbrace{Y_{n+1}}_{\perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_n} \,|\, \mathscr{F}_n) \\ &= M_n \cdot \mathbb{E}(Y_{n+1}) = M_n \cdot (n+3)\frac{1}{n+3} = M_n.\end{aligned}$$

**b)** Si ha

$$\{\tau > n\} = \{Y_0 \leq 1, \ldots, Y_n \leq 1\} = \bigcap_{k=1}^{n} \underbrace{\{Y_k \leq 1\}}_{\in \mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n$$

e quindi $\tau$ è un $\mathscr{F}_n$-t.a. Poi, osservando che gli eventi $\{Y_k \leq 1\}$, $k = 1, \dots, n$, sono indipendenti (perché $\{Y_k \leq 1\} \in \sigma(Y_k)$ e le $Y_k$ sono indipendenti), si ha

$$\mathbb{P}(\tau > n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(Y_k \leq 1) = \prod_{k=1}^n \Big(\mathbb{P}(Y_k = 0) + \mathbb{P}(Y_k = 1)\Big) \equiv \prod_{k=1}^n \gamma_k$$

dove, essendo $Y_k \sim \mathrm{Bi}(k, \frac{1}{k})$, $\gamma_1 = 1$ e per $k > 1$,

$$\gamma_k = \Big(1 - \frac{1}{k}\Big)^k + \Big(1 - \frac{1}{k}\Big)^{k-1} = \Big(1 - \frac{1}{k}\Big)^{k-1}\Big(2 - \frac{1}{k}\Big).$$

Dobbiamo mostrare che $\mathbb{P}(\tau > n) \to 0$ per $n \to \infty$. Equivalentemente, basta far vedere che $-\log \mathbb{P}(\tau > n) \to +\infty$ per $n \to \infty$. Si ha

$$-\log \mathbb{P}(\tau > n) = \sum_{k=1}^n -\log \gamma_k.$$

Osserviamo che $-\log \gamma_k > 0$ per ogni $k > 1$ ed inoltre

$$\lim_{k\to\infty} -\log \gamma_k = -\log(2e^{-1}) > 0.$$

Dunque, $\sum_k -\log \gamma_k = +\infty$, da cui la tesi.

**c)** Poiché $\tau < +\infty$ q.c. si ha subito che $M_{\tau\wedge n} \to M_\tau$ q.c. Per studiare la convergenza in $L^1$ e/o in $L^2$, osserviamo che $\{M_{\tau\wedge n}\}_n$ è una martingala ed inoltre

$$M_{\tau\wedge n} = M_\tau \mathbf{1}_{\{\tau\leq n\}} + M_n \mathbf{1}_{\{\tau>n\}} = \sum_{k=1}^n M_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} + M_n \mathbf{1}_{\{\tau>n\}}.$$

Ora, su $\{\tau > n\}$ si ha $Y_1 \leq 1, \dots, Y_n \leq 1$, quindi $0 \leq M_n \leq 1$. Inoltre, su $\{\tau = k\}$, con $k > 1$, si ha $Y_1 \leq 1, \dots, Y_{k-1} \leq 1, Y_k = 2$, e quindi $0 \leq M_k \leq 2$. Allora,

$$0 \leq M_{\tau\wedge n} \leq 2.$$

Quindi $\{M_{\tau\wedge n}\}_n$ è limitata in $L^p$ per ogni $p \geq 1$, dunque converge a $M_\tau$ in $L^p$ per ogni $p \geq 1$.

---

## 12 Soluzioni - Scritto, II Appello I Sessione a.a. 2010/2011

**Esercizio 1. a)** Per $k \geq 1$, osserviamo che, per qualche $\Phi_k$ boreliana, $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}_k) = \mathbb{E}(X \mid Y_k) \equiv \Phi_k(Y_k)$ e le $Y_k$ sono indipendenti in $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, quindi $\{\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}_k)\}_k$ è una successione di v.a. indipendenti. Inoltre, per ogni $k \neq j$, $\Phi_k = \Phi_j$ perché $(X, Y_k)$ ha la stessa legge di $(X, Y_j)$. Dunque, le v.a. $\mathbb{E}(X \mid Y_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, sono i.i.d. ed inoltre,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\{\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}_k)|) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}_k)) = \mathbb{E}(X) \\
\mathbb{E}(|\{\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}_k)|^2) &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X|^2 \mid \mathscr{G}_k)) = \mathbb{E}(X^2) < \infty.
\end{aligned}$$

Possiamo quindi usare la LFGN, che assicura che $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}_k) \to \mathbb{E}(X) = 1$ $\mathbb{P}$-q.c.

**b)** Prima di tutto, si ha

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}\Big(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})\big) = \mathbb{E}(X) = 1$$

e quindi $\mathbb{Q}$ è effettivamente una misura di probabilità. Poi, se $0 < q \leq p - 1$, usando la disuguaglianza di Jensen per la media condizionale si ha

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(\big|\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})\big|^q\big) = \mathbb{E}\big(\big|\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})\big|^{q+1}\big) \leq \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(|X|^{q+1} \mid \mathscr{G})\big) = \mathbb{E}(|X|^{q+1}) < \infty$$

se $0 < q + 1 \leq p$ perché $X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Dunque, l'affermazione è vera.

**Esercizio 2. a)** Usando le medie condizionali, si fa molto presto. Infatti,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{itX_n}) = \mathbb{E}(e^{itYZ_n}) &= \mathbb{E}\big(\underbrace{\mathbb{E}(e^{itYZ_n} \mid Z_n)}_{Z_n \perp\!\!\!\perp Y}\big) = \mathbb{E}\big(\underbrace{\mathbb{E}(e^{itYz})}_{=e^{-t^2z^2/2}}|_{z=Z_n}\big) \\
&= \mathbb{E}\big(e^{-\frac{t^2Z_n^2}{2}}\big) = n\int_0^{1/n} e^{-\frac{t^2z^2}{2}}\,dz
\end{aligned}$$

Oppure, sempre ricordando che $Y \perp\!\!\!\perp Z_n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{itX_n}) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{ityz}\Lambda_Y(dy)\Lambda_{Z_n}(dz) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{ityz}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy\, n\mathbf{1}_{z\in(0,1/n)}\,dz \\
&= n\int_0^{1/n} dz\,\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ityz}e^{-y^2/2}dy}_{=e^{-t^2z^2/2}} = n\int_0^{1/n} e^{-\frac{t^2z^2}{2}}\,dz
\end{aligned}$$

Poiché la funzione integranda è regolare,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(e^{itX_n}) = \lim_{n\to\infty} n\int_0^{1/n} e^{-\frac{t^2z^2}{2}}\,dz = e^{-\frac{t^2z^2}{2}}|_{z=0} = 1$$

che è la funzione caratteristica della v.a. nulla q.c. Dunque, $X_n \to 0$ in legge.

**b)** $X_n \to 0$ anche in probabilità. Studiamo la convergenza q.c. Poiché $|Z_n| \leq \frac{1}{n}$ q.c. si ha $|X_n| = |YZ_n| \leq \frac{1}{n}|Y| \to 0$ q.c. Infine, ricordando che $Y \in L^p$ per ogni $p \geq 1$

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) \leq \frac{1}{n^p}\mathbb{E}(|Y|^p) \to 0$$

e quindi c'è convergenza anche in $L^p$, per ogni $p \geq 1$.

**Esercizio 3. a)** Ricordiamo che se $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$ allora $\mathbb{E}(e^{\lambda Y}) = e^{\lambda^2/2}$. Poiché $S_n \sim \mathrm{N}(0,n) \simeq \sqrt{n}\,\mathrm{N}(0,1)$, per quanto appena detto si ha che $M_n \in L^1$. Inoltre, $M_n$ è ovviamente $\mathscr{F}_n$-misurabile (funzione continua di $X_1, \dots, X_n$). Osservando poi che $M_{n+1} = M_n \cdot e^{\vartheta X_{n+1} - \vartheta^2/2}$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(\underbrace{M_n}_{\mathscr{F}_n\text{-mis.}} \cdot e^{\vartheta X_{n+1} - \vartheta^2/2} \,|\, \mathscr{F}_n) = M_n \cdot \mathbb{E}(\underbrace{e^{\vartheta X_{n+1} - \vartheta^2/2}}_{\perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_n} \,|\, \mathscr{F}_n) \\ &= M_n \cdot \mathbb{E}(e^{\vartheta X_{n+1} - \vartheta^2/2}) = M_n\end{aligned}$$

**b)** Per ogni $\vartheta$, $\{M_n\}_n$ è una martingala positiva, dunque limitata in $L^1$ e quindi converge q.c. ad una v.a. $Y \in L^1$. Se $\vartheta = 0$, ovviamente $M_n = 1$ per ogni $n$, e non c'è altro da aggiungere. Se invece $\vartheta \neq 0$,

$$M_n = \exp\Big(n\Big(\vartheta\,\frac{S_n}{n} - \frac{\vartheta^2}{2}\Big)\Big) \to 0$$

perché per la LFGN,

$$\vartheta\,\frac{S_n}{n} - \frac{\vartheta^2}{2} \to -\frac{\vartheta^2}{2} < 0.$$

Osserviamo che, essendo $\mathbb{E}(|M_n|) = \mathbb{E}(M_n) = 1$ per ogni $n$, otteniamo che $M_n \not\to 0$ in $L^1$ quando $\vartheta \neq 0$, il che prova che $\{M_n\}_n$ non è uniformemente integrabile, proprietà che è invece banalmente verificata quando $\vartheta = 0$.

**c)** Per $n = 0, 1, 2, \dots$, $\{\tau \leq n\} = \{|X_1| \leq n\} \in \mathscr{F}_1$. Se $n \geq 1$, $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_n$ e quindi $\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n$. Se invece $n = 0$, $\{\tau \leq 0\} = \{|X_1| \leq 0\} = \{X_1 = 0\}$ e $\{X_1 = 0\}$ è un evento di $\mathbb{P}$-misura nulla che in generale non coincide con $\emptyset$ (unico evento trascurabile di $\mathscr{F}_0$). Dunque, non possiamo dedurre che $\tau$ sia un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto.

**d)** $\mathscr{G}_n$ è banalmente una filtrazione: $\mathscr{F}_n \cup \mathcal{N} \subset \mathscr{F}_{n+1} \cup \mathcal{N}$ e quindi $\mathscr{G}_n = \sigma(\mathscr{F}_n \cup \mathcal{N}) \subset \sigma(\mathscr{F}_{n+1} \cup \mathcal{N}) = \mathscr{G}_{n+1}$. Poi, se $n \geq 1$, $\{\tau \leq n\} = \{|X_1| \leq n\} \in \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_n \subset \mathscr{G}_n$. Per $n = 0$, $\{\tau \leq 0\} = \{|X_1| \leq 0\} = \{X_1 = 0\} \in \mathcal{N} \subset \mathscr{G}_0$. Dunque, $\tau$ è un $\mathscr{G}_n$-tempo d'arresto.

---

## 13 Soluzioni - Scritto, Appello unico II Sessione a.a. 2010/2011

**Esercizio 1. a1)** Per $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \in A) &= \mathbb{P}(Y \in A, |X| \leq a) + \mathbb{P}(Y \in A, |X| > a) \\ &= \mathbb{P}(X \in A, |X| \leq a) + \mathbb{P}(-X \in A, |X| > a) \\ &= \Lambda_X(A \cap \{|x| \leq a\}) + \Lambda_{-X}(A \cap \{|x| > a\})\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con $\Lambda_X$ e $\Lambda_{-X}$ la legge di $X$ e di $-X$ rispettivamente. Poiché per $k \in E$ si ha

$$\Lambda_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k) = 2^{-(|k|+1)} = \mathbb{P}(X = -k) = \mathbb{P}(-X = k) = \Lambda_{-X}(\{k\}),$$

si ottiene $\Lambda_X = \Lambda_{-X}$ e quindi

$$\mathbb{P}(Y \in A) = \Lambda_X(A \cap \{|x| \leq a\}) + \Lambda_X(A \cap \{|x| > a\}) = \Lambda_X(A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

**a2)** $X$ e $Y$ non sono indipendenti. Infatti, prendiamo ad esempio $A = (a, +\infty)$ e $B = (0, a)$. Allora, $\{X \in A, Y \in B\} = \emptyset$, quindi $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = 0$. Ma, $\mathbb{P}(X \in A) > 0$ e $\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(X \in B) > 0$, da cui evidentemente $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \neq \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.

**b1)** Dev'essere $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$, quindi (ricordando che $X$ è una v.a. simmetrica)

$$c^{-1} = \mathbb{E}(e^{-|X|}) = 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}\frac{1}{2^{k+1}} = 2 \cdot \frac{1}{4e}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2e}\Big)^k = \frac{1}{2e-1}$$

da cui $c = 2e - 1$.

**b2)** Ovviamente $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$: se $\mathbb{P}(A) = 0$ allora $\mathbf{1}_A = 0$ $\mathbb{P}$-q.c. e quindi $\mathbb{Q}(A) = 0$. E si ha

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = ce^{-|X|}.$$

Poi, essendo $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} > 0$ $\mathbb{P}$-q.c. e quindi $\mathbb{Q}$-q.c. si ottiene immediatamente che $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ e

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \Big(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big)^{-1} = \frac{1}{c}\,e^{|X|}.$$

**b3)** Si ha

$$\mathbb{E}(e^X) = \mathbb{E}(\underbrace{e^X\mathbf{1}_{\{X\leq 0\}}}_{\leq 1}) + \mathbb{E}(e^X\mathbf{1}_{\{X>0\}}) = const + \sum_{k\geq 1}\frac{e^k}{2^{k+1}} = +\infty$$

e dunque $e^X \notin L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Poi, detta $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ l'aspettazione sotto $\mathbb{Q}$, si ha

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^X) = c^{-1}\mathbb{E}(e^{X-|X|}) \leq c^{-1}$$

perché $X - |X| \leq 0$ e quindi $e^{X-|X|} \leq 1$. Dunque, $e^X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$

**Esercizio 2.** **a)** Si ha (usiamo una notazione unidimensionale ma nulla cambia nel caso generale)

$$\varphi_{YZ_n}(t) = \mathbb{E}(e^{itYZ_n}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(e^{itYZ_n}\,|\,Z_n))\big) \overset{(a)}{=} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(e^{itYz})_{|z=Z_n}\big) = \mathbb{E}(\varphi_Y(tZ_n))$$

dove in $(a)$ abbiamo usato la seguente proprietà: se $Y \perp\!\!\!\perp Z$ allora $\mathbb{E}(\psi(Y,Z)\,|\,Z) = \mathbb{E}(\psi(Y,z))_{|z=Z}$.

**b)** Per ogni $t$ fissato, $z \mapsto \varphi_Y(tz)$ è una funzione continua, dunque se $Z_n \to c$ in legge allora $\varphi_Y(tZ_n) \to \varphi_Y(tc)$ in legge. Ed essendo $\varphi_Y(tc)$ una quantità deterministica, $\varphi_Y(tZ_n) \to \varphi_Y(tc)$ anche in probabilità.

**c)** Ricordiamo che la funzione caratteristica è uniformemente continua: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\sup_{|\xi-\eta|<\delta} |\varphi_Y(\xi) - \varphi_Y(\eta)| < \varepsilon$. Ora, per $\varepsilon$ e $\delta$ come sopra e per ogni $t$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(|\varphi_Y(tZ_n) - \varphi_Y(tc)|\big) =&\mathbb{E}\big(|\varphi_Y(tZ_n) - \varphi_Y(tc)|\mathbf{1}_{\{|tZ_n-tc|\leq\delta\}}\big)+\\ &+\mathbb{E}\big(|\varphi_Y(tZ_n) - \varphi_Y(tc)|\mathbf{1}_{\{|tZ_n-tc|>\delta\}}\big)\\ \leq&\varepsilon + 2\mathbb{P}(|t|\,|Z_n - c| > \delta)\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(|\varphi_Y(tZ_n) - \varphi_Y(tc)|\big) \leq \varepsilon$$

(ricordiamo infatti che $\mathbb{P}(|Z_n - c| > \eta) \to 0$ per ogni $\eta > 0$). Essendo $\varepsilon$ arbitrario, si ottiene la tesi.

**d)** Si ha

$$\varphi_{YZ_n}(t) \overset{\text{da } \mathbf{a)}}{=} \mathbb{E}\big(\varphi_Y(tZ_n)\big) \overset{\text{da } \mathbf{c)}}{\to} \varphi_Y(tc) = \varphi_{cY}(t)$$

e quindi $YZ_n \to cY$ in legge.

**Esercizio 3.** Osserviamo che $X_n$ è integrabile e

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Essendo poi le $X_n$ indipendenti, si ha che $M_n \in L^1$ per ogni $n$. Inoltre, $M_n$ è funzione (boreliana) di $X_0, \dots, X_n$, dunque $M_n$ è $\mathscr{F}_n$-misurabile. Infine

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(\underbrace{M_n}_{\mathscr{F}_n\text{-mis.}} \cdot X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = M_n\mathbb{E}(\underbrace{X_{n+1}}_{\perp\!\!\!\perp \text{ da } \mathscr{F}_n} \,|\, \mathscr{F}_n) = M_n \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1})}_{=1} = M_n.$$

Dunque, $M_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala. Osserviamo che $\{M_n\}_n$ è limitata in $L^1$:

$$\mathbb{E}(|M_n|) = \mathbb{E}(M_n) = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{E}(X_k) = 1$$

da cui segue che $M_n \to M$ q.c., per una qualche v.a. $M$. Per identificare $M$, osserviamo che

$$M_n = e^{\sum_{k=0}^n \log X_k} = e^{n\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n \log X_k}.$$

Le v.a. $\log X_k$ sono ancora indipendenti, hanno momento secondo e la media vale

$$\mathbb{E}(\log X_k) = \frac{1}{2}\cdot\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\log\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\cdot\log\frac{3}{4} < 0.$$

Allora, usando la LFGN, si ha

$$n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \log X_k \to -\infty \quad \text{q.c.}$$

e quindi $M = 0$ q.c. In particolare, si ottiene che $\{M_n\}_n$ non converge in $L^1$: se così fosse, si dovrebbe avere $\mathbb{E}(M) = 1$, il che è falso. Dunque, e infine, $\{M_n\}_n$ non converge in $L^p$ per ogni $p \geq 1$.