II Esonero
Complementi di Probabilità
a.a. 2011/2012

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, siano X_1 e X_2 due v.a. i.i.d. di legge[1] Exp(1). Per $\alpha > 0$, sia $\mathbb{Q}_\alpha$ la misura di probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$ definita da

$$\mathbb{Q}_\alpha(A) = \mathbb{E}\big((\alpha+1)e^{-\alpha X_1}\mathbf{1}_A\big), \quad A \in \mathscr{F}.$$

a) Scrivere la funzione caratteristica di $X = (X_1, X_2)$ sotto $\mathbb{Q}_\alpha$ e dire se X_1 e X_2 rimangono i.i.d.

b) Sia $\{\mu_n\}_n \subset \mathrm{Prob}(\mathbb{R}^2)$ definita come segue: per $n \in \mathbb{N}$, μ_n è la legge di $X = (X_1, X_2)$ sotto $\mathbb{Q}_\alpha$ quando $\alpha = n$. Studiare la convergenza debole di $\{\mu_n\}_n$.

Esercizio 2. Sia $(M_n)_{n\geq 0}$ una martingala non negativa e limitata in L^2. Posto

$$X = \sum_{n\geq 0} M_n,$$

dimostrare che X è una v.a. finita q.c. se e solo se $X = 0$ q.c.

Esercizio 3. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sia data una successione $\{X_n\}_n$ di v.a. i.i.d. di legge[2] Po(1). Poniamo $S_0 = 0$, $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e per $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Fissato $\rho > 1$, sia

$$M_n = e^{-n(\rho-1)}\,\rho^{S_n}, \quad n \geq 0.$$

a) Dimostrare che $(M_n)_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala che converge a 0 q.c. Converge anche in L^1?

Per $a > 0$, sia $\tau_a = \inf\{n \geq 0 \,:\, S_n \geq a\}$.

b) Dimostrare che τ_a è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto finito q.c.

c) Verificare che su $\{\tau_a = k\}$ si ha $S_k \leq a + X_k$ e su $\{\tau_a > n\}$ si ha $S_n \leq a$. Dedurre che

$$0 \leq M_{\tau_a\wedge n} \leq \sum_{k\leq n} e^{-k(\rho-1)}\,\rho^{a+X_k}\mathbf{1}_{\{\tau_a=k\}} + \rho^a\,\mathbf{1}_{\{\tau_a>n\}}$$

e che $(M_{\tau_a\wedge n})_n$ è un processo limitato in L^2.

d) Dedurre da **c)** la seguente formula: $\mathbb{E}\big(e^{-\tau_a x}\,(x+1)^{S_{\tau_a}}\big) = 1$, $x \geq 0$. Provare di conseguenza che

$$\mathbb{E}\big(e^{-\tau_a x}\big) \leq \frac{1}{(x+1)^a}, \quad x \geq 0.$$

[1] Ricordiamo che se $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ allora $\mathbb{E}(e^{zX}) = \frac{\lambda}{\lambda - z}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}(z) < \lambda$.

[2] Ricordiamo che se $Z \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ allora $\mathbb{P}(Z = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \ldots$; inoltre, $\mathbb{E}(Z) = \lambda$ e $\mathbb{E}(\rho^Z) = e^{\lambda(\rho-1)}$, $\rho \neq 0$.

Soluzioni

Esercizio 1. a) Per $\theta \in \mathbb{R}^2$, indichiamo con $\varphi_\alpha(\theta)$ la funzione caratteristica di X sotto $\mathbb{Q}_\alpha$. Si ha

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(\theta) =& \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_\alpha}(e^{i\langle\theta,X\rangle}) = \mathbb{E}\Big(e^{i\langle\theta,X\rangle}\frac{d\mathbb{Q}_\alpha}{d\mathbb{P}}\Big) = (\alpha+1)\mathbb{E}\big(e^{i\langle\theta,X\rangle}e^{-\alpha X_1}\big)\\ =&(\alpha+1)\mathbb{E}\big(e^{(i\theta_1-\alpha)X_1}e^{i\theta_2 X_2}\big).\end{aligned}$$

Ma $(i\theta_1-\alpha)X_1$ e $i\theta_2X_2$ sono indipendenti, ed usando il suggerimento ($\mathrm{Re}(i\theta_1-\alpha) = -\alpha < 0 < 1$) si ha

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(\theta) &= (\alpha+1)\mathbb{E}\big(e^{(i\theta_1-\alpha)X_1}\big)\mathbb{E}\big(e^{i\theta_2X_2}\big)\\ &= \frac{\alpha+1}{\alpha+1-i\theta_1}\times\frac{1}{1-i\theta_2} \equiv \psi_{\mathrm{Exp}(\alpha+1)}(\theta_1)\times\psi_{\mathrm{Exp}(1)}(\theta_2),\end{aligned}$$

dove $\psi_{\mathrm{Exp}(\lambda)}$ denota la f.c. della legge $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Ciò prova che, sotto $\mathbb{Q}_\alpha$, X_1 e X_2 sono indipendenti ma non equidistribuite perché $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\alpha+1)$ e $X_2 \sim \mathrm{Exp}(1)$.

b) Posto $\hat{\mu}_n$ la funzione caratteristica di μ_n, allora $\hat{\mu}_n = \varphi_n$, quindi

$$\hat{\mu}_n(\theta) = \frac{n+1}{n+1-i\theta_1}\times\frac{1}{1-i\theta_2}.$$

Ma allora, detta ν la legge $\mathrm{Exp}(1)$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_n(\theta) = 1\times\frac{1}{1-i\theta_2} = \hat{\delta}_{\{0\}}(\theta_1)\times\hat{\nu}(\theta_2) = \widehat{\mu}(\theta)$$

dove $\mu = \delta_{\{0\}}\times\nu$ denota la misura prodotto di $\delta_{\{0\}}$ e ν su $\mathbb{R}^2$, da cui segue che $\mu_n \overset{w}{\to} \mu$. Detto in altri termini, e posto $X_n = (X_{n,1}, X_{n,2})$ una v.a. che ha la stessa legge di X sotto $\mathbb{Q}_n$, la successione $\{X_n\}_n$ converge in legge ad una v.a. $Z = (Z_1, Z_2)$, dove $Z_1 = 0$ q.c. e $Z_2 \sim \mathrm{Exp}(1)$.

Esercizio 2 Se $X = 0$ q.c. ovviamente X è finita q.c. Viceversa, se X è finita q.c. allora $\sum_n M_n$ è una serie convergente q.c., quindi $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ q.c. Ma $(M_n)_{n\geq 0}$ è una martingala limitata in L^2, dunque esiste $M_\infty \in L^2$ tale che $M_n \to M_\infty$ q.c. e in L^2. Ma allora $M_\infty = 0$ q.c. ed essendo $M_n \geq 0$ q.c. per ogni n, si ha anche $\mathbb{E}(M_n) = \|M_n\|_1 \to 0$. Poiché però $\{\mathbb{E}(M_n)\}_n$ è una successione costante, dev'essere $\mathbb{E}(M_n) = 0$ per ogni n, cioè $M_n = 0$ q.c. per ogni n. Dunque, $X = \sum_n M_n = 0$ q.c.

Esercizio 3. a) M_n è banalmente $\mathscr{F}_n$-misurabile. È integrabile perché, al variare di k ρ^{X_k} sono v.a. i.i.d. e in L^1 (vedi suggerimento) e quindi $\rho^{S_n} = \prod_{k=1}^n \rho^{X_k} \in L^1$. Infine.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n\times e^{-(\rho-1)}\,\rho^{X_{n+1}}\,|\,\mathscr{F}_n) = M_n\,e^{-(\rho-1)}\mathbb{E}(\rho^{X_{n+1}}\,|\,\mathscr{F}_n)\\ &= M_n\,e^{-(\rho-1)}\mathbb{E}(\rho^{X_{n+1}}) = M_n\,e^{-(\rho-1)}\,e^{\rho-1} = M_n\end{aligned}$$

Poiché $M_n \geq 0$, si ha $M_n \to M_\infty$, per qualche v.a. $M_\infty \in L^1$. Dimostriamo che $M_\infty = 0$ q.c. Osserviamo che

$$M_n = \Big(e^{-(\rho-1)}\,\rho^{\frac{1}{n}S_n}\Big)^n$$

e, per la LFGN, $\frac{1}{n}S_n \to \mathbb{E}(X_1) = 1$ q.c., quindi

$$e^{-(\rho-1)}\,\rho^{\frac{1}{n}S_n} \to \rho\, e^{-(\rho-1)}.$$

Ma, per $\rho > 1$ è facile vedere che $0 < \rho\, e^{-(\rho-1)} < 1$. Infatti, $\rho\, e^{-(\rho-1)} < 1$ $\forall \rho > 1$ sse $e^x > x + 1$ $\forall x > 0$, il che è vero. Ma allora si ottiene subito che $M_n \to 0$ q.c. Infine, se convergesse anche in L^1 si avrebbe che $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(|M_n|) \to 0$. Ma $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0) = 1$ per ogni n, quindi non è vero che $M_n \to 0$ anche in L^1.

b) Per $n \geq 0$,

$$\{\tau_a > n\} = \{S_1 < a, \ldots, S_n < a\} = \cap_{k=1}^n \underbrace{\{S_k < a\}}_{\in \mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n$$

e quindi τ_a è un $\mathscr{F}_n$-t.a. Poi,

$$\mathbb{P}(\tau_a > n) \leq \mathbb{P}(S_n < a) = \mathbb{P}\Big(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{n}} < \frac{a - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{n}}\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{n}} < \frac{a}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\Big)$$

perché $\mathbb{E}(S_n) = n$. Quindi, per ogni n_* e $n \geq n_*$ possiamo scrivere

$$\mathbb{P}(\tau_a > n) \leq \mathbb{P}\Big(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{n}} < a - \sqrt{n_*}\Big).$$

Usando il TLC e denotando con Φ_σ la f.d. della legge $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$, si ha

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau_a > n) \leq \Phi_\sigma(a - \sqrt{n_*}).$$

Mandando $n_* \to \infty$, si ottiene $\mathbb{P}(\tau_a > n) \to 0$ e quindi $\tau_a < \infty$ q.c.
In alternativa, si può osservare che

$$\begin{aligned}\{\tau_a = +\infty\} &= \bigcap_n \{S_n < a\} \subset \Big\{\sum_k X_k < +\infty\Big\} \\ &\subset \Big\{\lim_n X_n = 0\Big\} = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} \{X_k = 0\}\end{aligned}$$

perché le X_k assumono valori in $\{0, 1, \ldots\}$. Ma per ogni n fissato,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k\geq n} \{X_k = 0\}\Big) &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^N \{X_k = 0\}\Big) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^N \mathbb{P}(X_k = 0) \\ &= \lim_{N\to\infty} e^{-(N-n+1)} = 0,\end{aligned}$$

da cui segue che $\mathbb{P}(\tau_a = +\infty) = 0$.

c) Abbiamo già visto che su $\{\tau_a > n\}$ si ha $S_n \le a$. Poiché $\{\tau_a = k\} = \{S_1 < a, \dots, S_{k-1} < a, S_k \ge a\} \subset \{S_{k-1} \le a\}$, su $\{\tau_a = k\}$ si ha $S_k = S_{k-1} + X_k \le a + X_k$. Allora,

$$\begin{aligned} M_{\tau_a \wedge n} &= M_{\tau_a \wedge n} \mathbf{1}_{\{\tau_a \le n\}} + M_{\tau_a \wedge n} \mathbf{1}_{\{\tau_a > n\}} \\ &= \sum_{k \le n} e^{-k(\rho-1)} \rho^{S_k} \mathbf{1}_{\{\tau_a = k\}} + \underbrace{e^{-n(\rho-1)}}_{\le 1} \rho^{S_k} \mathbf{1}_{\{\tau_a > n\}} \\ &\le \sum_{k \le n} e^{-k(\rho-1)} \rho^{a+X_k} \mathbf{1}_{\{\tau_a = k\}} + \rho^a \mathbf{1}_{\{\tau_a > n\}}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$M^2_{\tau_a \wedge n} \le \sum_{k \le n} e^{-2k(\rho-1)} \rho^{2(a+X_k)} \mathbf{1}_{\{\tau_a = k\}} + \rho^{2a} \mathbf{1}_{\{\tau_a > n\}}$$

e

$$\mathbb{E}(M^2_{\tau_a \wedge n}) \le \sum_{k \le n} e^{-2k(\rho-1)} \underbrace{\mathbb{E}(\rho^{2(a+X_k)})}_{=c_a} + \rho^{2a} \le c_a \sum_k \left(e^{-2(\rho-1)}\right)^k + \rho^{2a} < \infty,$$

il che prova che $(M_{\tau_a \wedge n})_n$ è limitato in L^2.

d) Per $x = 0$, l'uguaglianza è banalmente soddisfatta. Sia quindi $x > 0$.
Ovviamente $M_{\tau_a \wedge n} \to M_{\tau_a}$ q.c. e da **c)** si ha che $M_{\tau_a \wedge n} \to M_{\tau_a}$ anche in L^2, dunque in L^1. Allora,

$$1 = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_{\tau_a \wedge n}) \to \mathbb{E}(M_{\tau_a}),$$

quindi $\mathbb{E}(M_{\tau_a}) = 1$. Ma $M_{\tau_a} = e^{-\tau_a(\rho-1)}\, \rho^{S_{\tau_a}}$, quindi

$$\mathbb{E}(e^{-\tau_a(\rho-1)}\, \rho^{S_{\tau_a}}) = 1,$$

e la tesi è vera per $x = \rho - 1 > 0$. Oppure, essendo $\{M_{\tau_a \wedge n}\}_n$ una martingala che converge in L^1 a M_{τ_a}, per il teorema di convergenza in L^1 possiamo scrivere

$$M_{\tau_a \wedge n} = \mathbb{E}(M_{\tau_a} \mid \mathscr{F}_n)$$

e passando alle medie,

$$\mathbb{E}(M_{\tau_a \wedge n}) = \mathbb{E}(M_{\tau_a}).$$

Ma $\mathbb{E}(M_{\tau_a \wedge n}) = \mathbb{E}(M_0) = 1$ e $\mathbb{E}(M_{\tau_a}) = \mathbb{E}(e^{-\tau(\rho-1)}\, \rho^{S_{\tau_a}})$, da cui la tesi.
Infine, essendo $S_{\tau_a} \ge a$ si ha

$$1 = \mathbb{E}(e^{-\tau_a x}(x+1)^{S_{\tau_a}}) \ge (x+1)^a \mathbb{E}(e^{-\tau_a x}),$$

e quindi

$$\mathbb{E}(e^{-\tau_a x}) \le \frac{1}{(x+1)^a}.$$