I ESONERO
 COMPLEMENTI DI PROBABILITÀ
 A.A. 2011/2012

Esercizio 1. Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. a valori reali di legge $\Lambda_X(\Gamma) = \frac{1}{2}\delta_{\{c\}}(\Gamma) + \frac{1}{2}\mu(\Gamma)$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dove $\delta_{\{c\}}$ denota la massa di Dirac in $c \geq 0$ e μ denota la legge¹ $\text{Exp}(1)$.

- a) Dire se X è una v.a. assolutamente continua.
 b) Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ boreliana. Per $p \geq 1$, dimostrare che $g(X) \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se e solo se $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$. Verificare poi che per $g(X) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si ha

$$\mathbb{E}(g(X)) = \frac{1}{2}g(c) + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(x)e^{-x} dx.$$

- c) Per $A \in \mathcal{F}$, sia $\mathbb{Q}_c(A) = \frac{2}{c+1} \mathbb{E}(X\mathbf{1}_A)$. Verificare che $\mathbb{Q}_c$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$. Dire se $\mathbb{Q}_c \ll \mathbb{P}$ e/o $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}_c$, ed in caso affermativo scrivere $\frac{d\mathbb{Q}_c}{d\mathbb{P}}$ e/o $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}_c}$.
 d) Scrivere la legge $\Lambda_X^{\mathbb{Q}_c}$ di X sotto $\mathbb{Q}_c$ e dire se, sotto $\mathbb{Q}_c$, X è assolutamente continua.
 e) Sia Y una v.a. indipendente da X sotto $\mathbb{P}$. X e Y sono indipendenti anche sotto $\mathbb{Q}_c$?

Esercizio 2. Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. tale che $X \geq 0$ q.c. e $\mathbb{E}(X) = 1$. Sia $\mathbb{Q}$ definita da $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_A)$, $A \in \mathcal{F}$. Sia ora $\{\gamma_n\}_n \subset \mathbb{R}_+$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$. Per $n \geq 1$, si ponga

$$X_n = \frac{X + \gamma_n}{1 + \gamma_n} \quad \text{e} \quad \mathbb{Q}_n(A) = \mathbb{E}(X_n\mathbf{1}_A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

- a) Verificare che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}_n$, $n \geq 1$, sono misure di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$.
 b) Dimostrare che per ogni $A \in \mathcal{F}$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_n(A) = \mathbb{Q}(A)$.
 c) Dimostrare che si ha di più, e cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{F}} |\mathbb{Q}_n(A) - \mathbb{Q}(A)| = 0.$$

Esercizio 3. Sia $\{T_n\}_n$ una successione di v.a. tali che² $T_n \sim \text{Ge}(1 - 1/n^2)$, $n \geq 1$. Dire se $T_n \rightarrow 1$ in L^2 . Studiare poi la convergenza di $\{T_n\}_n$ in probabilità, q.c. e in L^1 .

¹Cioè $\mu(\Gamma) = \int_\Gamma e^{-x}\mathbf{1}_{x>0} dx$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

²Ricordiamo che $T \sim \text{Ge}(p)$ se T ha la legge del primo successo in prove bernoulliane ripetute in cui la probabilità del successo è p . Quindi, $\mathbb{P}(T = k) = (1 - p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \dots$. In particolare, si ha $\mathbb{E}(T) = 1/p$ e $\text{Var}(T) = (1 - p)/p^2$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. a) X non è assolutamente continua. Infatti, preso $A = \{c\}$ allora $\text{Leb}_1(A) = 0$ ma $\Lambda_X(A) = 1/2 > 0$.

b) Intanto, $g(X) \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se e solo se $|g(X)|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, quindi basta studiare lo spazio $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Sappiamo che $f(X) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se e solo se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \Lambda_X)$, dunque basta dimostrare che $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \Lambda_X)$ se e solo se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ e che vale l'uguaglianza scritta nell'esercizio. Procediamo come di consueto.

Passo 1: f semplice e non negativa: $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{x \in \Gamma_k}$, con $a_k \geq 0$ e $\Gamma_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k = 1, \dots, n$. Allora,

$$\begin{aligned} \int f(x) d\Lambda_X(x) &= \sum_{k=1}^n a_k \Lambda_X(\Gamma_k) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{1}{2} \delta_{\{c\}}(\Gamma_k) + \frac{1}{2} \mu(A_k) \right) \\ &= \frac{1}{2} \int f(x) d\delta_{\{c\}}(x) + \frac{1}{2} \int f(x) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} f(c) + \frac{1}{2} \int f(x) e^{-x} \mathbf{1}_{x>0} dx. \end{aligned}$$

Passo 2: f boreliana e non negativa. Sia $\{f_n\}_n$ una successione di funzioni semplici non negative tale che $f_n \uparrow f$. Allora, usando il primo passo,

$$\begin{aligned} \int f(x) d\Lambda_X(x) &= \lim_n \int f_n(x) d\Lambda_X(x) \\ [\text{passo 1. } \rightarrow] &= \lim_n \left(\frac{1}{2} \int f_n(x) d\delta_{\{c\}}(x) + \frac{1}{2} \int f_n(x) d\mu(x) \right) \\ [\text{MON } \rightarrow] &= \frac{1}{2} \int f(x) d\delta_{\{c\}}(x) + \frac{1}{2} \int f(x) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} f(c) + \frac{1}{2} \int f(x) e^{-x} \mathbf{1}_{x>0} dx. \end{aligned}$$

Passo 3: f boreliana. Allora: $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \Lambda_X)$ sse $f^\pm$ sono tali che $\int f^\pm(x) d\delta_{\{c\}}(x)$ e $\int f^\pm(x) d\mu(x) < \infty$ (ma $\int f^\pm(x) d\delta_{\{c\}}(x) = f^\pm(c) < \infty$ sempre e quindi) sse $f^\pm$ sono tali che $\int f^\pm(x) d\mu(x) < \infty$ sse $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$. In tal caso,

$$\begin{aligned} \int f d\Lambda_X &= \int f^+ d\Lambda_X - \int f^- d\Lambda_X \\ &= \frac{1}{2} \left(\int f^+ d\delta_{\{c\}} - \int f^- d\delta_{\{0\}} \right) + \frac{1}{2} \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) \\ &= \frac{1}{2} \int f d\delta_{\{c\}} + \frac{1}{2} \int f d\mu \\ &= \frac{1}{2} f(c) + \frac{1}{2} \int f(x) e^{-x} \mathbf{1}_{x>0} dx. \end{aligned}$$

c) Presa $f(x) = x$, da a) si ha facilmente $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ e

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot c + \frac{1}{2} \int_0^\infty x e^{-x} dx = \frac{c+1}{2}.$$

Poiché $c \geq 0$, si ha $\Lambda_X((-\infty, 0)) = 0$ e quindi $X \geq 0$ q.c. Ciò prova che $\mathbb{Q}_c$ è una misura. Inoltre, essendo $\frac{2}{c+1} \mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{Q}_c$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$. Ovviamente, $\mathbb{Q}_c \ll \mathbb{P}$ e $\frac{d\mathbb{Q}_c}{d\mathbb{P}} = \frac{2}{c+1} X$.

Poi, se $c = 0$ si ha $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2 > 0$, quindi l'affermazione " $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}_c$ " è falsa. Se invece $c > 0$, si ha $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, quindi $X > 0$ $\mathbb{P}$ -q.c. e allora si ha $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}_c$ e $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}_c} = \left(\frac{d\mathbb{Q}_c}{d\mathbb{P}}\right)^{-1} = \frac{c+1}{2X}$.

d) Per $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} \Lambda_X^{\mathbb{Q}_c}(\Gamma) &= \mathbb{Q}_c(X \in \Gamma) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_c}(\mathbf{1}_{X \in \Gamma}) = \frac{2}{c+1} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \in \Gamma}) \\ &= \frac{c}{c+1} \mathbf{1}_{\{c \in \Gamma\}} + \frac{1}{c+1} \int x \mathbf{1}_{x \in \Gamma} \mu(dx) \\ &= \frac{c}{c+1} \delta_{\{c\}}(\Gamma) + \frac{1}{c+1} \int x \mathbf{1}_{x \in \Gamma} \mu(dx) \\ &= \int_\Gamma \left(\frac{c}{c+1} d\delta_{\{c\}} + \frac{1}{c+1} x e^{-x} dx \right), \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\Lambda_X^{\mathbb{Q}_c}(\Gamma) = \frac{c}{c+1} \delta_{\{c\}}(\Gamma) + \frac{1}{c+1} \nu(\Gamma), \quad \text{dove } \nu(\Gamma) = \int_\Gamma x e^{-x} dx$$

(cioè $\nu \sim \Gamma(2, 1)$).

Se $c \neq 0$ allora X non è assolutamente continua: $\Lambda_X^{\mathbb{Q}_c}(\{c\}) > 0$ ma $\text{Leb}_1(\{c\}) = 0$. Se invece $c = 0$, si ha

$$\Lambda_X^{\mathbb{Q}_0}(\Gamma) = \nu(\Gamma) = \int_\Gamma x e^{-x} \mathbf{1}_{x>0} dx,$$

e quindi $\Lambda_X^{\mathbb{Q}_0} \ll \text{Leb}_1$ e $\frac{d\Lambda_X^{\mathbb{Q}_0}}{d\text{Leb}_1} = x e^{-x} \mathbf{1}_{x>0}$.

e) Prese f, g boreliane e limitate, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_c}(f(X)g(Y)) &= \mathbb{E}\left(f(X)g(Y) \frac{d\mathbb{Q}_c}{d\mathbb{P}}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{c+1}{2} X f(X)g(Y)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{c+1}{2} X f(X)\right) \mathbb{E}(g(Y)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_c}(f(X)) \underbrace{\frac{c+1}{2} \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(g(Y))}_{=1} \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_c}(f(X)) \mathbb{E}\left(\frac{c+1}{2} X g(Y)\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_c}(f(X)) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_c}(g(Y)) \end{aligned}$$

quindi $X \perp\!\!\!\perp Y$ anche sotto $\mathbb{Q}_c$.

Esercizio 2. a) Poiché $X \geq 0$ q.c. e $X_n = X + \gamma_n \geq 0$ q.c., $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_n$ sono misure su $(\Omega, \mathcal{F})$. Poi, si ha

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}(X) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbb{Q}_n(\Omega) = \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{1 + \gamma_n} \underbrace{\mathbb{E}(X + \gamma_n)}_{=1+\gamma_n} = 1$$

dunque effettivamente $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_n$ sono misure di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$.

b) Osserviamo che $X_n \mathbf{1}_A \rightarrow X \mathbf{1}_A$ q.c. e poiché $\gamma_n \rightarrow 0$ si ha, per ogni n grande, $|X_n \mathbf{1}_A| = X_n \mathbf{1}_A \leq (X + 1) \mathbf{1}_A \leq X + 1 \in L^1$. Allora, da DOM, otteniamo $X_n \mathbf{1}_A \rightarrow X \mathbf{1}_A$ in L^1 , quindi in particolare si ha $\mathbb{Q}_n(A) = \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A) \rightarrow \mathbb{E}(X \mathbf{1}_A) = \mathbb{Q}(A)$.

c) Preso $A = \Omega$ nel punto precedente, si ha $X_n \rightarrow X$ in L^1 . Quindi, per ogni $A \in \mathcal{F}$,

$$|\mathbb{Q}_n(A) - \mathbb{Q}(A)| = |\mathbb{E}((X_n - X) \mathbf{1}_A)| \leq \mathbb{E}(|X_n - X| \mathbf{1}_A) \leq \mathbb{E}(|X_n - X|).$$

Ma allora, $\sup_{A \in \mathcal{F}} |\mathbb{Q}_n(A) - \mathbb{Q}(A)| \leq \mathbb{E}(|X_n - X|) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, da cui la tesi.

Esercizio 3. Se $T \sim \text{Ge}(p)$, $\mathbb{E}(T^2) = \text{Var}(T) + \mathbb{E}(T)^2 = \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$. Dunque,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|T_n - 1|^2) &= \mathbb{E}(T_n^2) + 1 - 2\mathbb{E}(T_n) = \frac{2 - p_n}{p_n^2} + 1 - \frac{2}{p_n} \\ &= \frac{2 - 3p_n + p_n^2}{p_n^2} = \frac{(2 - p_n)(1 - p_n)}{p_n^2} \end{aligned}$$

con $p_n = 1 - 1/n^2$, da cui si ottiene subito che $\mathbb{E}(|T_n - 1|^2) \rightarrow 0$, e quindi $T_n \rightarrow 1$ in L^2 . Come immediata conseguenza, si ha $T_n \rightarrow 1$ in probabilità (conv. in $L^p \Rightarrow$ conv. in prob.) e $T_n \rightarrow 1$ in L^1 ($\|T_n - 1\|_1 \leq \|T_n - 1\|_2$). Per la convergenza q.c. osserviamo che $2 - p_n \leq 2$, $p_n \geq 1/2$ per ogni n grande e quindi

$$\mathbb{E}(|T_n - 1|^2) = \frac{(2 - p_n)(1 - p_n)}{p_n^2} \leq \frac{8}{n^2}$$

definitivamente. Fissato $\varepsilon > 0$, per la disuguaglianza di Markov si ha

$$\mathbb{P}(|T_n - 1| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|T_n - 1|^2)}{\varepsilon^2} \leq \frac{8}{n^2 \varepsilon^2}$$

definitivamente, quindi $\sum_n \mathbb{P}(|T_n - 1| > \varepsilon) < \infty$. Applicando BC1, otteniamo che $T_n \rightarrow 1$ anche q.c.