

ESERCITAZIONE IX
COMPLEMENTI DI PROBABILITÀ
A.A. 2011/2012

Argomenti: convergenza debole.

Esercizio 1. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. tale che $X_n \xrightarrow{w} X$ e sia f una funzione continua. Dimostrare che $f(X_n) \xrightarrow{w} f(X)$.

Esercizio 2. (Convergenza in L^1 delle densità $\Leftrightarrow$ convergenza debole)

- a) Sia X_n una v.a. con densità di probabilità f_n , $n = 1, 2, \dots$ e sia f tale che $f_n \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R}, \text{Leb})$. Dimostrare che f è una densità di probabilità e, dette X_n e X v.a. con densità f_n e f rispettivamente, $X_n \rightarrow X$ in legge.
- b) Per $n = 1, 2, \dots$, sia $F_n(x) = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}$ se $0 \leq x < 1$, $F_n(x) = 0$ se $x < 0$ e $F_n(x) = 1$ se $x \geq 1$. Verificare che F_n è una funzione di distribuzione, per ogni n . Detta X_n una v.a. con f.d. F_n , verificare che X_n ha densità di probabilità f_n . Dimostrare poi che $X_n \rightarrow X$ in legge, con $X \sim \text{Un}(0, 1)$, ma la successione delle densità $\{f_n\}_n$ non converge in $L^1(\mathbb{R}, \text{Leb})$ (né q.o.) alla densità uniforme su $(0, 1)$.

Esercizio 3. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. tali che $X_n \sim \text{Un}(0, \frac{1}{n})$.

- a) Studiare la convergenza in legge della successione $\{n^\gamma X_n\}_n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.
- b) Studiare la convergenza in legge di $\{(nX_n)^\beta\}_n$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Siano $\{X_n\}_n$, $\{Y_n\}_n$ due successioni di v.a. e X, Y due ulteriori v.a. Dimostrare che

$$\text{se } X_n \xrightarrow{\mathcal{A}} X \text{ e } Y_n \xrightarrow{\mathcal{A}} Y \text{ allora } X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{A}} X + Y$$

dove “ $\xrightarrow{\mathcal{A}}$ ” denota la convergenza q.c. oppure in probabilità¹ oppure in L^p . Mostrare che lo stesso risultato in generale non vale se “ $\xrightarrow{\mathcal{A}}$ ” = convergenza in legge.

Esercizio 5. È noto che se $X_n \xrightarrow{w} X$ non è detto che $X_n \rightarrow X$ in probabilità. Dimostrare però che se $X_n \xrightarrow{w} c$, con $c \in \mathbb{R}$, allora $X_n \rightarrow c$ in probabilità. Generalizzare il risultato in dimensione d qualsiasi.

Esercizio 6. Siano $\{Z_n\}_n$ e $\{V_n\}_n$ due successioni di v.a. su $\mathbb{R}^d$ tali che $Z_n \rightarrow Z$ in legge e $V_n \rightarrow c$ in legge, dove $c \in \mathbb{R}^d$ è una costante. Dimostrare che $Z_n + V_n \rightarrow Z + c$ in legge.

¹Potrebbe essere utile il seguente fatto: se U e V denotano due v.a. allora per ogni $\delta > 0$, $\{|U + V| > \delta\} \subset \{|U| + |V| > \delta\} \subset \{|U| > \delta/2\} \cup \{|V| > \delta/2\}$.

Esercizio 7. [Il metodo delta] Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. su $\mathbb{R}$ tale che $\{\sqrt{n}(X_n - m)\}_n$ converge in legge ad una v.a. $N(0, \sigma^2)$, dove $m \in \mathbb{R}$ e $\sigma \geq 0$. Dimostrare che per ogni funzione $g \in C^1$, la successione $\{\sqrt{n}(g(X_n) - g(m))\}_n$ converge in legge ad una v.a. $N(0, (\sigma g'(m))^2)$.

[Sugg.: 1) dimostrare che $X_n \rightarrow m$ in probabilità; 2) dimostrare che $g(X_n) = g(m) + g'(\xi_n)(X_n - m)$, con $\xi_n \rightarrow m$ in probabilità; 3) dedurre che $\sqrt{n}(g(X_n) - g(m)) = (g'(\xi_n) - g'(m))\sqrt{n}(X_n - m) + g'(m)\sqrt{n}(X_n - m)$ ed usare l'esercizio 6.]

Esercizio 8. Sia $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti tali che $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/n = 1 - \mathbb{P}(X_n = n^\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato. Studiare la convergenza q.c., in probabilità, in L^p e in legge di $\{X_n\}_n$. Cosa cambia se si elimina l'ipotesi di indipendenza?

Esercizio 9. a) Siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d. con legge $\text{Po}(\lambda)^2$. Dimostrare che $S_n := \sum_{k=0}^n X_k \sim \text{Po}(n\lambda)$.

b) Sia $g \in C_b(\mathbb{R})$. Dimostrare che, per ogni $\lambda > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = g(\lambda).$$

Esercizio 10. a) Sia $\{\mu_n\}_n$ la successione di misure di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definita da

$$\mu_n = (1 - \alpha_n) \delta_0 + \alpha_n \delta_n,$$

dove $\delta_x \equiv \delta_{\{x\}}$ denota la misura di Dirac in $x \in \mathbb{R}$ e $\{\alpha_n\}_n$ è una successione in $[0, 1]$. Dimostrare che $\{\mu_n\}_n$ converge debolmente per $n \rightarrow \infty$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

b) (convergenza in legge $\not\Rightarrow$ convergenza in L^p) Usando **a)**, costruire un esempio di successione $\{\mu_n\}_n$ che converge debolmente ma tale che non convergano le successioni delle medie e/o delle varianze alla media e/o alla varianza del limite.

Esercizio 11. a) Siano $\{\mu_n\}_n$ e $\{\nu_n\}_n$ due successioni di misure di probabilità su $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ tali che $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ e $\nu_n \xrightarrow{w} \nu$ per $n \rightarrow \infty$, con μ e ν due misure di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dimostrare che³ $\mu_n * \nu_n \xrightarrow{w} \mu * \nu$.

b) Sia μ una misura di probabilità su $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ e sia ν_n la legge $N(0, \sigma_n^2)$. Dimostrare che $\mu * \nu_n \xrightarrow{w} \mu$ per $\sigma_n \rightarrow 0$.

²Si ricorda che $X \sim \text{Po}(\mu)$ se $\mathbb{P}(X = j) = \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu}$, con $j = 0, 1, \dots$

³Ricordiamo che $\mu * \nu$ denota il prodotto di convoluzione tra μ e ν : $\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - z) \nu(dz) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A - z) \mu(dz)$, dove, per $z \in \mathbb{R}^d$, $A - z = \{x \in \mathbb{R}^d : x = y - z, y \in A\}$ è l'insieme che si ottiene traslando A con z . Si ricorda inoltre che, dette X e Y due v.a. indipendenti con legge μ e ν rispettivamente, allora $\mu * \nu$ è la legge di $X + Y$.

- c) Dedurre⁴ che presa $\mu \in \text{Prob}(\mathbb{R}^d)$, esiste una successione $\{f_n\}_n \subset L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \text{Leb}_d)$, con $f_n \geq 0$ q.o. per ogni n , tale che

$$\int h(x) \mu(dx) = \lim_n \int h(x) f_n(x) dx, \quad \forall h \in C_b(\mathbb{R}^d).$$

Esercizio 12. (*Un po' di controesempi*)

- a) (*convergenza in legge $\nrightarrow$ convergenza q.c., in probabilità, in L^p*) Sia $Y \sim \text{Un}(0, 1)$ e $\{X_n\}_n$ tale che $X_n = Y$ per ogni n . Studiare la convergenza di $\{X_n\}_n$ a $X = 1 - Y$.
- b) Sia $\{X_n\}_n$ tale che $\mathbb{P}(X_n = n^\alpha) = 1/n^2 = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza di $\{X_n\}_n$.
- c) Sia $\{X_n\}_n$ tale che $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$. Studiare la convergenza di $\{X_n\}_n$.

Esercizio 13. Sia X_n una v.a. discreta, uniforme su $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Studiare la convergenza in legge di $\{X_n/n\}_n$.

Esercizio 14. Sia N il primo istante (aleatorio!) in cui si osserva l'uscita di testa in una serie di lanci ripetuti di una moneta. Sia $p \in (0, 1)$ la probabilità che esca testa. Studiare la convergenza in legge⁵ di $2pN$ quando $p \rightarrow 0$.

Esercizio 15. Sia $\{Y_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d., uniformi sull'insieme $\{0, 1, \dots, 9\}$. Per $n \geq 1$, sia $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k 10^{-k}$. Usando le funzioni caratteristiche, dimostrare che X_n converge in legge ad una v.a. uniforme su $[0, 1]$. Dedurre poi che esiste una v.a. $Z \sim \text{Un}(0, 1)$ tale che $X_n \rightarrow Z$ q.c.

Esercizio 16. Dato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, poniamo $L_d^2 = L_d^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d : \mathbb{E}(|X|^2) < \infty\}$ e per $X \in L_d^2$, $\|X\|_2 = (\mathbb{E}(|X|^2))^{1/2}$. Definiamo⁶ $\mathcal{X}$ come l'insieme delle v.a. X a valori in $\mathbb{R}^d$ tali che $X \sim N(\mu, C)$, per qualche $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \text{Mat}(d \times d)$ simmetrica e semidefinita positiva.

- a) Dimostrare che $\mathcal{X} \subset L_d^2$.
- b) Dimostrare che se $\{X_n\}_n \subset \mathcal{X}$, $X_n \sim N(\mu_n, C_n)$, è tale che $X_n \rightarrow X$ in L^2 allora
- b1) le successioni $\{\mathbb{E}(X_n^i)\}_n$ e $\{\mathbb{E}(X_n^i X_n^j)\}_n$, $i, j = 1, \dots, d$, convergono;

⁴Ricordiamo che se ν è assolutamente continua allora $\mu * \nu$ è assolutamente continua (cfr Esercizio 5, Esercitazione VII).

⁵Scrivere esplicitamente la f.c. di N e quindi di $2pN$, studiandone poi il comportamento asintotico per $p \rightarrow 0$.

⁶Ricordiamo che $X \sim N(\mu, C)$ se e solo se $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} AY + \mu$, dove $A \in \text{Mat}(d \times d)$ simmetrica è tale che $A \cdot A = C$ e $Y \sim N(0, I_{d \times d})$. Equivalentemente, se la funzione caratteristica di X è $\varphi_X(\vartheta) = \exp(i\langle \vartheta, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle C\vartheta, \vartheta \rangle)$.

- b2)** le successioni $\{\mu_n\}_n \subset \mathbb{R}^d$ e $\{C_n\}_n \subset \text{Mat}(d \times d)$ convergono;
- b3)** si ha $X \sim N(\mu, C)$, dove μ e C sono t.c. $\mu = \lim_n \mu_n$ e $C = \lim_n C_n$.

c) Dimostrare che $\mathcal{X}$ è un chiuso in L_d^2 .

Esercizio 17. Per $n \geq 1$, sia $\nu_n \sim N(0, \frac{1}{n}I_{d \times d})$, dove $I_{d \times d}$ denota la matrice identica $d \times d$.

- a)** Dimostrare che $\nu_n \xrightarrow{w} \delta_{\{0\}}$, essendo $\delta_{\{0\}}$ la massa di Dirac nell'origine.
- b)** Sia $\mu \in \text{Prob}(\mathbb{R}^d)$ e per $n \geq 1$ sia⁷ $\mu_n = \mu * \nu_n$. Dimostrare che $\mu_n \ll \text{Leb}_d$ per ogni n e che $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.
- c)** Dedurre che:
 - c1)** se $X_n \rightarrow X$ in legge e X_n è assolutamente continua per ogni n , ciò non implica in generale che X sia anch'essa assolutamente continua;
 - c2)** ogni v.a. X su $\mathbb{R}^d$ si può approssimare in legge con una successione di v.a. assolutamente continue.

⁷Ricordiamo che se μ e ν sono due misure di probabilità su $\mathbb{R}^d$ allora $\mu * \nu$ è la misura su $\mathbb{R}^d$ definita da $\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathbf{1}_A(x+y) \mu \times \nu(dx, dy)$, $A \in \mathbb{R}^d$. Come conseguenza, si ha $\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(A-z) \nu(dz) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu(A-z) \mu(dz)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1 Poniamo $Y_n = f(X_n)$ e $Y = f(X)$. Presa $g \in \mathcal{C}_b$, allora $g \circ f \in C_b$. Allora, poiché $X_n \xrightarrow{w} X$,

$$\mathbb{E}(g(Y_n)) = \mathbb{E}(g \circ f(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(g \circ f(X)) = \mathbb{E}(g(Y)),$$

quindi $Y_n \xrightarrow{w} Y$. Oppure, dal Teorema di Skorohod esiste uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dov'è possibile definire una successione di v.a. $\{Z_n\}_n$ e un'ulteriore v.a. Z tali che $Z_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_n$ (“ $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ ” significa “ha la stessa legge”), per ogni n , $Z \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$ e $Z_n \rightarrow Z$ q.c. Essendo f continua, $f(Z_n) \rightarrow f(Z)$ q.c., quindi $f(Z_n) \xrightarrow{w} f(Z)$. Ora, poiché $f(X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} f(Z_n)$ e $f(X) \stackrel{\mathcal{L}}{=} f(Z)$, si ha anche $f(X_n) \xrightarrow{w} f(X)$.

Esercizio 2 a) Perché f sia una densità dev'essere $f \geq 0$ q.o. e $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$. Poiché $f_n \rightarrow f$ in L^1 , per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ si ha

$$\left| \int_A f_n(x) dx - \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$, quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A f(x) dx, \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Poiché f_n è una densità per ogni n , $\int_A f_n(x) dx \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$. Ma allora $\int_A f(x) dx \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, da cui segue che $f \geq 0$ q.o., ed inoltre $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$, cioè f è una densità di probabilità. Siano ora X_n e X v.a. con densità, rispettivamente, f_n e f . Presa $g \in C_b$, allora

$$\mathbb{E}(g(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_n(x) dx \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$$

Allora, se M_g denota una costante positiva tale che $|g(x)| \leq M_g$ per ogni x , si ha

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(g(X_n)) - \mathbb{E}(g(X))| &= \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) f_n(x) dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(x)| |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq M_g \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Quindi $\mathbb{E}(g(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(g(X))$ se $n \rightarrow \infty$ per ogni $g \in \mathcal{C}_b$, cioè $X_n \rightarrow X$ in legge.

b) Per $x \in (0, 1)$, si ha

$$F'_n(x) = 1 - \cos(2n\pi x) \geq 0,$$

quindi F_n è crescente su $(0, 1)$. Poiché per $x < 0$ $F_n(x) = 0 = F_n(0)$ e per $x > 1$ $F_n(x) = 1 = F_n(1)$, F_n è monotona non decrescente. Inoltre, F_n è continua per ogni n , quindi in particolare càdlàg. Infine, $F_n(-\infty) = 0$ e $F_n(+\infty) = 1$, quindi F_n è una f.d. Notiamo infine che $f_n(x) = F'_n(x)$ esiste per q.o. x e $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$, quindi

$$f_n(x) = \left(1 - \cos(2n\pi x)\right) \mathbf{1}_{x \in (0,1)}$$

è la densità associata alla f.d. F_n .

Fissiamo ora $x \in \mathbb{R}$. Allora,

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

che è la f.d. di una v.a. $X \sim \text{Un}(0, 1)$. Ma allora $X_n \rightarrow X$ in legge. Detta $f(x) = \mathbf{1}_{x \in (0,1)}$ la densità di X , in questo caso $f_n \not\rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R}, \text{Leb})$, e neanche per q.o. x . Infatti, $\cos(2n\pi x)$ non converge q.o., quindi $f_n \not\rightarrow f$ q.o. Inoltre,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^1} &= \int_0^1 |\cos(2n\pi x)| dx = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} |\cos t| dt \\ &= \frac{1}{2n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\cos t| dt = \frac{1}{2n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} |\cos t| dt = \frac{C}{2\pi} \end{aligned}$$

dove $C = \int_0^{2\pi} |\cos t| dt > 0$. Quindi $\|f_n - f\|_{L^1} \not\rightarrow 0$.

Esercizio 3 Osserviamo anzitutto che la f.d. di X_n è

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ nx & \text{se } 0 \leq x < 1/n \\ 1 & \text{se } x \geq 1/n \end{cases}$$

a) La f.d. di $n^\gamma X_n$ è

$$F_n^\gamma(x) = \mathbb{P}(n^\gamma X_n \leq x) = G_n(x/n^\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ n^{-(\gamma-1)}x & \text{se } 0 \leq x < n^{\gamma-1} \\ 1 & \text{se } x \geq n^{\gamma-1} \end{cases}$$

Allora, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^\gamma(x) = F^\gamma(x)$, dove $F^\gamma(x) \equiv 0$ se $\gamma > 1$ e

$$\begin{aligned} \text{se } \gamma = 1 : \quad F^\gamma(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \\ \text{se } \gamma < 1 : \quad F^\gamma(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi se $\gamma > 1$ non c'è convergenza in legge: la funzione limite F^γ non è una f.d., neanche se la si modifica su un insieme trascurabile, perché $F^\gamma(+\infty) = 0$.

Se $\gamma = 1$, la f.d. limite è la f.d. di una v.a. $X \sim \text{Un}(0, 1)$, dunque $nX_n \rightarrow X \sim \text{Un}(0, 1)$ in legge.

Se invece $\gamma < 1$, la funzione limite F^γ non è una f.d. ma lo diventa se la si modifica solo nel punto $x = 0$: posto

$$\tilde{F}^\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

allora $\tilde{F}^\gamma$ è la f.d. della v.a. (costante) $X = 0$ q.c. e $F_n^\gamma(x) \rightarrow \tilde{F}^\gamma(x)$ per ogni x di continuità per $\tilde{F}^\gamma$, quindi $n^\gamma X_n \rightarrow 0$ in legge (e in particolare $n^\gamma X_n \rightarrow 0$ in probabilità...).

b) Ser $\beta = 0$, $(nX_n)^\beta = 1$ q.c., quindi la convergenza è ovvia. Studiamo allora il caso $\beta \neq 1$.

La f.d. di $(nX_n)^\beta$ è $F_n^\beta(x) = \mathbb{P}((nX_n)^\beta \leq x)$. Per $\beta > 0$, $F_n^\beta(x) = 0$ se $x \leq 0$ e $F_n^\beta(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x^{1/\beta}/n)$ se $x > 0$, quindi

$$F_n^\beta(x) \equiv F^\beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^{1/\beta} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Per $\beta < 0$, $F_n^\beta(x) = 0$ se $x \leq 0$ e se invece $x > 0$ si ha $F_n^\beta(x) = \mathbb{P}(X_n \geq x^{1/\beta}/n) = 1 - \mathbb{P}(X_n < x^{1/\beta}/n)$, quindi

$$F_n^\beta(x) \equiv F^\beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 - x^{1/\beta} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Allora, per $\beta \neq 0$, F_n^β non dipende da n , quindi $(nX_n)^\beta$ converge in legge ad una v.a. X_β con f.d. F^β .

Esercizio 4 1) Sia $\xrightarrow{\mathcal{A}} =$ convergenza q.c. Allora, esistono $N_X, N_Y \in \mathcal{F}$ tali che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_X) = 0 \text{ e per } \omega \notin N_X, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) &= X(\omega) \\ \mathbb{P}(N_Y) = 0 \text{ e per } \omega \notin N_Y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) &= Y(\omega). \end{aligned}$$

Posto $N = N_X \cup N_Y$, allora $\mathbb{P}(N) = 0$ e per $\omega \notin N$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n(\omega) + Y_n(\omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) + \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) = X(\omega) + Y(\omega),$$

cioè $X_n + Y_n$ converge q.c. a $X + Y$.

2) Sia $\xrightarrow{\mathcal{A}} =$ convergenza in probabilità. Fissato $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| > \delta\right) \leq \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \delta/2\right) + \mathbb{P}\left(|Y_n - Y| > \delta/2\right)$$

Poiché, per ogni $\delta > 0$, $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \delta/2\right) \rightarrow 0$ e $\mathbb{P}\left(|Y_n - Y| > \delta/2\right) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, si ottiene, per ogni $\delta > 0$, $\mathbb{P}\left(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| > \delta\right) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, cioè $X_n + Y_n \rightarrow X + Y$ in probabilità.

3) Sia $\xrightarrow{\mathcal{A}} =$ convergenza in L^p . Allora,

$$\|(X_n + Y_n) - (X + Y)\|_p = \|(X_n - X) + (Y_n - Y)\|_p \leq \|X_n - X\|_p + \|Y_n - Y\|_p$$

da cui segue immediatamente la tesi.

3) Sia $\xrightarrow{\mathcal{A}} =$ convergenza in legge. Prendiamo, ad esempio, due successioni costanti: $X_n = X$ e $Y_n = -X$, per ogni n . Ovviamente $X_n \rightarrow X$ in legge e $Y_n \rightarrow Y = -X$ in legge. Inoltre, $X_n + Y_n = 0$. Però, prendiamo due v.a. U e V indipendenti e tali che U ha la stessa legge di X e V ha la stessa legge di $Y = -X$. Allora, si ha anche $X_n \rightarrow U$ in legge e $Y_n \rightarrow V$ in legge. Ora, se l'affermazione fosse vera, si avrebbe $X_n + Y_n = 0 \rightarrow U + V$ in legge, che dà $U + V = 0$ q.c., il che non è vero in generale e prova l'assurdo (si immagini, ad esempio, $X \sim N(0, 1)$: allora $U \sim N(0, 1)$, $V \sim N(0, 1)$ e $U + V \sim N(0, 2)$).

Esercizio 5 La funzione di distribuzione di $X = c$ q.c. è

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < c \\ 1 & \text{se } x \geq c \end{cases}$$

e per ipotesi si ha

$$F_n(x) \rightarrow F(x) \text{ per ogni } x \neq c,$$

dove F_n denota la funzione di distribuzione di X_n . Ora, preso $\varepsilon > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n > c + \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n < c - \varepsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_n \leq c + \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n < c - \varepsilon) \\ &\leq 1 - F_n(c + \varepsilon) + F_n(c - \varepsilon) \end{aligned}$$

e quindi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) \leq 1 - F(c + \varepsilon) + F(c - \varepsilon) = 0$$

da cui la tesi.

Esercizio 6. Siano $\varphi_{Z_n+V_n}$ e φ_{Z+c} la funzione caratteristica rispettivamente di Z_n+V_n e $Z+c$. Ricordiamo che, essendo c costante, $V_n \rightarrow c$ in probabilità. Si ha,

$$\begin{aligned}
|\varphi_{Z_n+V_n}(t) - \varphi_{Z+c}(t)| &= |\mathbb{E}(e^{i\langle t, Z_n+V_n \rangle}) - \mathbb{E}(e^{i\langle t, Z+c \rangle})| \\
&= |\mathbb{E}(e^{i\langle t, Z_n+V_n \rangle} - e^{i\langle t, Z+c \rangle} + e^{i\langle t, Z+c \rangle} - e^{i\langle t, Z+c \rangle})| \\
&\leq \mathbb{E}(\underbrace{|e^{i\langle t, Z_n \rangle}|}_{\leq 1} \cdot |e^{i\langle t, V_n \rangle} - e^{i\langle t, c \rangle}|) + \\
&\quad + \underbrace{|e^{i\langle t, c \rangle}|}_{\leq 1} \cdot |\mathbb{E}(e^{i\langle t, Z_n \rangle} - e^{i\langle t, Z \rangle})| \\
&\leq \mathbb{E}(\underbrace{|e^{i\langle t, V_n \rangle} - e^{i\langle t, c \rangle}|}_{\leq |\langle t, V_n \rangle - \langle t, c \rangle| \leq |t| \cdot |V_n - c|} \mathbf{1}_{\{|V_n - c| \leq \delta\}}) + \\
&\quad + \mathbb{E}(\underbrace{|e^{i\langle t, V_n \rangle} - e^{i\langle t, c \rangle}|}_{\leq 2} \mathbf{1}_{\{|V_n - c| > \delta\}}) + |\varphi_{Z_n}(t) - \varphi_Z(t)| \\
&\leq |t|\delta + 2\mathbb{P}(|V_n - c| > \delta) + |\varphi_{Z_n}(t) - \varphi_Z(t)|
\end{aligned}$$

dove $\delta > 0$. Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, $\mathbb{P}(|V_n - c| > \delta) \rightarrow 0$ e $|\varphi_{Z_n}(t) - \varphi_Z(t)| \rightarrow 0$, quindi

$$\limsup_n |\varphi_{Z_n+V_n}(t) - \varphi_{Z+c}(t)| \leq |t|\delta.$$

Poiché δ si può scegliere arbitrariamente piccolo, si ha $\varphi_{Z_n+V_n}(t) \rightarrow \varphi_{Z+c}(t)$ per ogni t , da cui la tesi.

Esercizio 7. 1) Dimostriamo che $X_n \rightarrow m$ in probabilità: per $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - m| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|\sqrt{n}(X_n - m)| > \varepsilon\sqrt{n})$$

e per ogni $n > N$, N fissato,

$$\mathbb{P}(|X_n - m| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|\sqrt{n}(X_n - m)| > \varepsilon\sqrt{N}).$$

Allora,

$$\begin{aligned}
\limsup_n \mathbb{P}(|X_n - m| > \varepsilon) &\leq \limsup_n \mathbb{P}(|\sqrt{n}(X_n - m)| > \varepsilon\sqrt{N}) \\
&\leq 1 - \mathbb{P}(Z \leq \varepsilon\sqrt{N}) - \mathbb{P}(Z \leq -\varepsilon\sqrt{N} - 1).
\end{aligned}$$

Ora, se $N \rightarrow \infty$ otteniamo $\lim_n \mathbb{P}(|X_n - m| > \varepsilon) = 0$, da cui $X_n \rightarrow m$ in probabilità.

2) Usando lo sviluppo di Taylor al primo ordine, si ha $g(X_n) = g(m) + g'(\xi_n)(X_n - m)$. Poi, ricordando che $\xi_n(\omega) = t(\omega)X_n(\omega) + (1 - t(\omega))m$ con $t(\omega) \in [0, 1]$, si ha $|\xi_n - m| \leq |X_n - m|$ e da 1) segue che $\xi_n \rightarrow m$ in probabilità.

3) Si ha,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(g(X_n) - g(m)) &= (g'(\xi_n) - g'(m))\sqrt{n}(X_n - m) + g'(m)\sqrt{n}(X_n - m) \\ &\equiv V_n + Z_n.\end{aligned}$$

Ora, $Z_n \rightarrow Z \sim N(0, (g'(m))^2 \sigma^2)$ e $V_n \rightarrow 0$ in probabilità: presi $\varepsilon, N > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|V_n| > \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(\underbrace{|(g'(\xi_n) - g'(m))\sqrt{n}(X_n - m)| > \varepsilon, |\sqrt{n}(X_n - m)| > N}_{\subset \{|\sqrt{n}(X_n - m)| > N\}}\right) + \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\underbrace{|(g'(\xi_n) - g'(m))\sqrt{n}(X_n - m)| > \varepsilon, |\sqrt{n}(X_n - m)| \leq N}_{\subset \{N|g'(\xi_n) - g'(m)| > \varepsilon, |\sqrt{n}(X_n - m)| \leq N\} \subset \{|g'(\xi_n) - g'(m)| > \varepsilon/N\}}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(|\sqrt{n}(X_n - m)| > N\right) + \mathbb{P}\left(|g'(\xi_n) - g'(m)| > \varepsilon/N\right)\end{aligned}$$

Ma $\xi_n \rightarrow m$ in probabilità ed essendo g' una funzione continua, si ha anche $g'(\xi_n) \rightarrow g'(m)$ in probabilità, da cui

$$\begin{aligned}\limsup_n \mathbb{P}(|V_n| > \varepsilon) &\leq \limsup_n \mathbb{P}\left(|\sqrt{n}(X_n - m)| > N\right) \\ &\leq 1 - \Phi(\varepsilon\sqrt{N}) - \Phi(-\varepsilon\sqrt{N} - 1)\end{aligned}$$

dove Φ denota la f.d. di una legge $N(0, \sigma^2)$. Passando al limite per $N \rightarrow \infty$, si ottiene $V_n \rightarrow 0$ in probabilità. La tesi ora segue usando l'esercizio 6.

Esercizio 8 X_n assume solo due valori: 0, con probabilità $1/n$, e n^α , con probabilità $1 - 1/n$. È quindi semplice calcolare la f.d. F_n di X_n :

$$F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } 0 \leq x < n^\alpha \\ 1 & \text{se } x \geq n^\alpha \end{cases}$$

Quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F_\alpha(x)$, dove: per $\alpha < 0$,

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

se $\alpha = 0$,

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1; \end{cases}$$

se invece $\alpha > 0$,

$$F_\alpha(x) \equiv 0.$$

Allora, se $\alpha > 0$ il limite delle F_n non converge ad una f.d. (la funzione limite non diventa una f.d. neanche se la si modifica su una quantità numerabile di

punti), quindi in tal caso non c'è convergenza in legge, dunque nessun'altra forma di convergenza. Studiamo ora i rimanenti casi.

- $\alpha < 0$. La funzione limite F_α differisce dalla f.d. della v.a. $X = 0$ q.c. solo nel punto $x = 0$, che è il punto di salto, quindi possiamo concludere che $X_n \rightarrow 0$ in legge, dunque in probabilità. Vediamo se tale convergenza vale anche q.c.: fissato $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(X_n > \delta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{se } \delta < n^\alpha \\ 0 & \text{se } \delta \geq n^\alpha \end{cases}$$

Ora, poiché $n^\alpha \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, per ogni n grande si ha che $\delta > n^\alpha$, dunque $\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = 0$ per ogni n grande. Ma allora la serie $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta)$ converge, e da BC1 deduciamo che $X_n \rightarrow 0$ q.c. Infine, studiamo la convergenza (ovviamente a 0) in L^p :

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = \frac{n^{\alpha p}}{n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

da cui segue che $X_n \rightarrow 0$ anche in L^p .

- $\alpha = 0$. La funzione limite F_0 è la f.d. della v.a. $X = 1$ q.c., quindi $X_n \rightarrow 1$ in legge, dunque in probabilità. Vediamo se tale convergenza vale anche q.c.: fissato $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(X_n > \delta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{se } \delta < 1 \\ 0 & \text{se } \delta \geq 1 \end{cases}$$

Allora la serie $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta)$ non converge, e da BC2 (ricordiamo che per ipotesi le X_n sono indipendenti) deduciamo che $X_n \not\rightarrow 1$ q.c. Infine, studiamo la convergenza (ovviamente a 1) in L^p :

$$\mathbb{E}(|X_n - 1|^p) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

da cui segue che $X_n \rightarrow 1$ in L^p .

Infine, l'ipotesi di indipendenza è stata usata solo per applicare BC2 e per dimostrare che, nel caso $\alpha = 0$, $X_n \not\rightarrow 1$ q.c.: se si elimina l'ipotesi di indipendenza, potrebbe anche essere che $X_n \rightarrow 1$ q.c., per $\alpha = 0$.

Esercizio 9 a) Se $X \sim \text{Po}(\mu)$, la sua f.c. è

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \mathbb{E}(e^{i\theta X}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\theta k} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu e^{i\theta})^k}{k!} \\ &= e^{-\mu} e^{\mu e^{i\theta}} = e^{\mu(e^{i\theta} - 1)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Allora, ricordando che $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$, con X_k indipendenti $\text{Po}(\lambda)$,

$$\varphi_{S_n}(\theta) = \prod_{k=0}^n \varphi_{X_k}(\theta) = \left(e^{\lambda(e^{i\theta}-1)} \right)^n = e^{n\lambda(e^{i\theta}-1)}$$

e confrontando con (1) deduciamo che $S_n \sim \text{Po}(n\lambda)$. Oppure, si può dimostrare per induzione che la somma di Poisson indipendenti dà ancora una v.a. di Poisson usando la convoluzione(: farlo!!).

b) La LGN assicura che $S_n/n \rightarrow \mathbb{E}(X_1) = \lambda$ q.c. per $n \rightarrow \infty$, quindi in particolare $S_n/n \rightarrow \lambda$ in legge. Poiché $g \in C_b$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \mathbb{E}(g(\lambda)) = g(\lambda).$$

Ora, osservando che

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}$$

si ottiene la tesi.

Esercizio 10. a) Mostriamo anzitutto che $\{\mu_n\}_n$ è *tight* se e solo se⁸ $\alpha_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Per $K > 0$,

$$\begin{aligned} \mu_n([-K, K]) &= (1 - \alpha_n)\delta_0([-K, K]) + \alpha_n \delta_n([-K, K]) \\ &= (1 - \alpha_n) + \alpha_n \delta_n([-K, K]). \end{aligned}$$

Allora, per ogni $n > K$, $\mu_n([-K, K]) = (1 - \alpha_n)$, quindi

$$\inf_{n > K} \mu_n([-K, K]) = \inf_{n > K} (1 - \alpha_n) = 1 - \sup_{n > K} \alpha_n.$$

Quindi, se $\alpha_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ esiste n_0 tale che $\alpha_n < \varepsilon$ per ogni $n > n_0$: scelto allora $K = n_0$, si ha che

$$\inf_{n > K} \mu_n([-K, K]) = 1 - \sup_{n > K} \alpha_n > 1 - \varepsilon,$$

cioè $\{\mu_n\}_n$ è *tight*. Viceversa, supponiamo che μ_n sia *tight*: per ogni ε esiste un $K > 0$ tale che

$$1 - \varepsilon \leq \inf_n \mu_n([-K, K]) \leq \inf_{n > K} \mu_n([-K, K]) = 1 - \sup_{n > K} \alpha_n.$$

Ma allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n > n_0$ si ha che $0 \leq \alpha_n < \varepsilon$, cioè $\alpha_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

⁸L'idea è che, se $\alpha_n \not\rightarrow 0$, allora $\mu_n([n, +\infty)) = \mu_n(\{n\}) = \alpha_n$ non va a 0 per $n \rightarrow \infty$: la "massa" di μ_n "scappa" all'infinito.

Ciò prova che se $\{\mu_n\}_n$ converge debolmente allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Dimostriamo ora che vale anche il viceversa: supponiamo che $\alpha_n \rightarrow 0$ e dimostriamo che $\{\mu_n\}_n$ converge debolmente. Sia F_n la f.d. associata a μ_n :

$$F_n(x) = \mu_n((-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - \alpha_n & \text{se } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{se } x \geq n \end{cases}$$

Quindi, se $\alpha_n \rightarrow 0$, $F_n(x) \rightarrow F(x)$, dove

$$F = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

che è la f.d. della v.a. $X = 0$ q.c., quindi $\mu_n \xrightarrow{w} \mu = \delta_0$.

b) Fissiamo una successione α_n che va a 0, quindi il limite debole delle μ_n è $\mu = \delta_0$. Quindi la media e la varianza associate a μ sono entrambe uguali a 0. La media associata alle μ_n è

$$\int_{\mathbb{R}} x \mu_n(dx) = 0 \cdot (1 - \alpha_n) + n \cdot \alpha_n = n \alpha_n.$$

Quindi, la successione delle medie non converge alla media del limite se e solo se $n \alpha_n \not\rightarrow 0$, ad esempio $\alpha_n = n^{-\beta}$, con $0 < \beta \leq 1$ (ma anche $\alpha_n = 1/n$ se n è pari e $\alpha_n = 1/(2n)$ se n è dispari). Calcoliamo la varianza di μ_n :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu_n(dx) - (n \alpha_n)^2 = 0 \cdot (1 - \alpha_n) + n^2 \cdot \alpha_n - n^2 \alpha_n^2 = n^2 \alpha_n (1 - \alpha_n).$$

Non c'è convergenza delle varianze se e solo se $n^2 \alpha_n \not\rightarrow 0$, ad esempio $\alpha_n = n^{-\beta}$, con $0 < \beta \leq 2$ (si noti che per $1 < \beta \leq 2$ non convergono le varianze ma convergono le medie).

Esercizio 11. **a)** Indichiamo con φ_{μ_n} , φ_{ν_n} e $\varphi_{\mu_n * \nu_n}$ la funzione caratteristica di μ_n , ν_n e $\mu_n * \nu_n$ rispettivamente. Sappiamo che, per $n \rightarrow \infty$, $\varphi_{\mu_n} \rightarrow \varphi_{\mu}$ e $\varphi_{\nu_n} \rightarrow \varphi_{\nu}$, dove ovviamente φ_{μ} e φ_{ν} denotano le f.c. delle leggi limite μ e ν . Ora, dette X_n e Y_n delle v.a. con legge μ_n e ν_n rispettivamente, la misura $\mu_n * \nu_n$ è la legge di $X_n + Y_n$ quando si supponga che X_n e Y_n sono indipendenti. Analogamente, la misura $\mu * \nu$ è la legge di $X + Y$, con X e Y indipendenti e di legge, rispettivamente, μ e ν . Ma allora,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\mu_n * \nu_n}(\theta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n + Y_n}(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(\theta) \varphi_{Y_n}(\theta) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\mu_n}(\theta) \varphi_{\nu_n}(\theta) = \varphi_{\mu}(\theta) \varphi_{\nu}(\theta) = \varphi_X(\theta) \varphi_Y(\theta) = \varphi_{X+Y}(\theta) = \varphi_{\mu * \nu}(\theta) \end{aligned}$$

per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, da cui la tesi.

b) La tesi segue da **a)** una volta mostrato che $\nu_{\sigma_n} \xrightarrow{w} \delta_0$ per $\sigma_n \rightarrow 0$, dove δ_0 denota la misura di Dirac in 0. Infatti, in tal caso la legge limite sarebbe

$\mu * \delta_0$, ovvero la legge di $X+0 = X$, dove X è una v.a. con legge μ . Mostriamo quindi che $\nu_{\sigma_n} \xrightarrow{w} \delta_0$ per $\sigma_n \rightarrow 0$. Ricordando che $\nu_{\sigma_n} \sim N(0, \sigma_n^2)$, la sua f.c. è

$$\varphi_{\nu_{\sigma_n}}(\theta) = e^{-\sigma_n^2 \theta^2 / 2} \rightarrow 1, \quad \text{quando } \sigma_n \rightarrow 0.$$

Ora, ovviamente $\varphi_{\delta_0}(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta 0}) = 1$ per ogni θ , quindi $\nu_{\sigma_n} \xrightarrow{w} \delta_0$.

c) Sia $\nu_n = \nu_{\sigma_n}$, con $\sigma_n = 1/n$. Allora (Esercizio 5, Esercitazione VII), $\mu * \nu_n \ll \text{Leb}_d$ perché $\nu_n \ll \text{Leb}_d$. Posto $f_n = \frac{d\nu_n}{d\text{Leb}_d}$, da b) si ha

$$\int h(x) f_n(x) dx = \int h(x) \mu_n(dx) \rightarrow \int h(x) \mu(dx), \quad n \rightarrow \infty$$

per ogni $h \in C_b(\mathbb{R}^d)$, da cui la tesi.

Esercizio 12. a) $|X_n - X| = |1 - 2Y|$, quindi $X_n \not\rightarrow X$ q.c., in probabilità e in L^p . Studiamo la convergenza in legge. La f.d. di X è

$$F_X(x) = \mathbb{P}(1 - Y \leq x) = 1 - F_Y(1 - x).$$

Ora, poiché $Y \sim \text{Un}(0, 1)$, $F_Y(y) = y$ per $y \in [0, 1)$, $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$, quindi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

cioè $X \sim \text{Un}(0, 1)$. Allora, $F_{X_n}(x) = F_X(x)$ per ogni X , quindi $X_n \rightarrow X$ in legge.

b) Cominciamo a studiare la convergenza in legge. La legge di X_n è $\mu_n = (1 - 1/n^2) \delta_0 + 1/n^2 \delta_{n^\alpha}$: si verifica facilmente che $X_n \rightarrow 0$ in legge, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo analogo a quanto visto nell'esercizio 10. Oppure, si noti che

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{n^2} & \text{se } 0 \leq x < n^\alpha \\ 1 & \text{se } x > n^\alpha \end{cases}$$

e $F_{X_n}(x) \rightarrow F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dove

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è la f.d. della v.a. $X = 0$ q.c. Ma allora $X_n \rightarrow 0$ in legge, quindi in probabilità (perché il limite è costante q.c.). Inoltre, $X = 0$ q.c. è il “candidato limite” per ogni altro tipo di convergenza. Studiamo la convergenza in L^p :

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = n^{\alpha p - 2},$$

dunque $X_n \rightarrow 0$ in L^p se $\alpha < 2/p$. Per la convergenza q.c., osserviamo che, fissato $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(X_n = n^\alpha, n^\alpha > \delta) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n^\alpha > \delta \\ 0 & \text{se } n^\alpha \leq \delta \end{cases}$$

In ciascun caso, $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta) \leq \sum_n 1/n^2 < \infty$, quindi $X_n \rightarrow 0$ q.c. per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ricapitolando, $X_n \rightarrow 0$ q.c., in probabilità e in legge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$; fissato p , $X_n \rightarrow 0$ in L^p se $\alpha < 2/p$ e se invece $\alpha \geq 2/p$, X_n non converge in L^p .

c) $X_n \rightarrow 0$ in legge: si prova con argomenti analoghi a quelli usati in **b**). Quindi, $X_n \rightarrow 0$ anche in probabilità.

Per la convergenza in L^p , il limite non può che essere 0 e

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

quindi $X_n \rightarrow 0$ in L^p per ogni p .

Studiamo infine la convergenza q.c. Sia $\delta > 0$: se $\delta > 1$ allora $\mathbb{P}(|X_n| > \delta \text{ i.o.}) = 0$. Se invece $\delta \leq 1$ allora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n| > \delta \text{ i.o.}) &= \mathbb{P}(X_n = 1 \text{ i.o.}) = \mathbb{P}(\cap_n \cup_{k \geq n} \{X_k = 1\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\cup_{k \geq n} \{X_k = 1\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\cup_{k=n}^m \{X_k = 1\}). \end{aligned}$$

Ora $\cup_{k=n}^m \{X_k = 1\} \supset \{X_m = 1\}$, quindi $\mathbb{P}(\cup_{k=n}^m \{X_k = 1\}) \geq \mathbb{P}(X_m = 1) = 1 - 1/m$. Allora, per $0 < \delta \leq 1$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta \text{ i.o.}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1,$$

dunque $\mathbb{P}(|X_n| > \delta \text{ i.o.}) = 1$ e ciò prova che $X_n \not\rightarrow 0$ q.c.

Esercizio 13. Poniamo $Y_n = X_n/n$. Per ogni n fissato, Y_n è a valori in $\{1/n, 2/n, \dots, 1\}$, quindi $F_{Y_n}(y) = 0$ se $y < 0$ e $F_{Y_n}(y) = 1$ se $y \geq 1$. Se invece $y \in (0, 1)$,

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(X_n \leq ny) = \sum_{k: k \leq ny} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{[ny]}{n}$$

dove $[ny]$ denota la parte intera di ny . Poiché $[ny]/n \rightarrow y$ per $n \rightarrow \infty$, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = F(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ y & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

F è la f.d. di una v.a. $\text{Un}(0, 1)$, dunque $Y_n \rightarrow Y$ in legge, con $Y \sim \text{Un}(0, 1)$.

Esercizio 14. Cerchiamo dapprima la legge di N . Ovviamente N può assumere i valori $1, 2, \dots$, corrispondenti al lancio in cui per la prima volta si ottiene testa. Indichiamo con X_n il risultato dell' n -esimo lancio: $X_n = 1$ se esce testa e $X_n = 0$ se esce croce. Assumendo (ragionevolmente) le X_n indipendenti, si ha $\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ e per $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) = (1-p)^{k-1} p$$

(ovvero, N è una v.a. geometrica di parametro p). Studiamo la f.c. di $2pN$:

$$\varphi_{2pN}(\theta) = \varphi_N(2p\theta),$$

dove

$$\begin{aligned} \varphi_N(t) &= \mathbb{E}(e^{itN}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} (1-p)^{k-1} p = e^{it} p \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)e^{it} \right)^{k-1} \\ &= e^{it} p \sum_{k=0}^{\infty} \left((1-p)e^{it} \right)^k = e^{it} p \frac{1}{1 - (1-p)e^{it}} \end{aligned}$$

Allora,

$$\varphi_{2pN}(\theta) = \frac{p e^{2ip\theta}}{1 - (1-p)e^{2ip\theta}}.$$

Ora, per $p \rightarrow 0$, $e^{2ip\theta} = 1 + 2ip\theta + o(p)$, quindi, sempre per $p \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \varphi_{2pN}(\theta) &= \frac{p(1 + 2ip\theta + o(p))}{1 - (1-p)(1 + 2ip\theta + o(p))} \\ &= \frac{p(1 + 2ip\theta + o(p))}{-2ip\theta - o(p) + p + 2ip^2\theta + p o(p)} \\ &= \frac{1 + 2ip\theta + o(p)}{-2i\theta - o(p)/p + 1 + 2ip\theta + o(p)} \xrightarrow{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 - 2i\theta} =: g(\theta). \end{aligned}$$

Poiché il limite esiste per ogni θ e la funzione limite g è continua in $\theta = 0$, il teorema di convergenza garantisce che $2pN$ converge in legge, per $p \rightarrow 0$, ad una v.a. che ha g come f.c. Infine, osservando che $g(\theta) = \frac{1}{1-2i\theta} = \frac{1/2}{1/2-i\theta}$ è la f.c. della legge esponenziale di parametro $1/2$, si può concludere che $2pN$ converge in legge ad una v.a. che si distribuisce come una $\text{Exp}(1/2)$.

Oppure, si può anche procedere come segue. Indicando con F_p la f.d. di $2pN$, si ha $F_p(x) = \mathbb{P}(2pN \leq x) = \mathbb{P}(N \leq x/2p)$. Quindi, $F_p(x) = 0$ se $x < 2p$ e per $x \geq 2p$,

$$\begin{aligned} F_p(x) &= \sum_{k: 1 \leq k \leq x/2p} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=0}^{\lfloor x/2p \rfloor - 1} (1-p)^k \\ &= p \frac{1 - (1-p)^{\lfloor x/2p \rfloor}}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^{\lfloor x/2p \rfloor} \end{aligned}$$

Allora,

$$\lim_{p \rightarrow 0} F_p(x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

che è la f.d. di una $\text{Exp}(1/2)$, dunque $2pN \rightarrow X$ in legge, con $X \sim \text{Exp}(1/2)$.

Esercizio 15 Calcoliamo la f.c. di X_n : ricordando che le Y_k sono indipendenti, si ha

$$\varphi_{X_n}(\theta) = \prod_{k=1}^n \varphi_{Y_k 10^{-k}}(\theta) = \prod_{k=1}^n \varphi_{Y_k}(10^{-k} \theta).$$

Ora,

$$\varphi_{Y_k}(t) = \varphi_{Y_1}(t) = \mathbb{E}(e^{itY_1}) = \sum_{j=0}^9 e^{itj} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \sum_{j=0}^9 (e^{it})^j = \frac{1 - e^{10it}}{10(1 - e^{it})}.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \varphi_{X_n}(\theta) &= \prod_{k=1}^n \frac{1 - e^{10^{-k+1}i\theta}}{10(1 - e^{10^{-k}i\theta})} \\ &= \frac{1 - e^{10i\theta}}{10(1 - e^{10^{-1}i\theta})} \cdot \frac{1 - e^{10^{-1}i\theta}}{10(1 - e^{10^{-2}i\theta})} \cdot \frac{1 - e^{10^{-2}i\theta}}{10(1 - e^{10^{-3}i\theta})} \cdots \frac{1 - e^{10^{-n+1}i\theta}}{10(1 - e^{10^{-n}i\theta})} \\ &= \frac{1 - e^{i\theta}}{10^n(1 - e^{10^{-n}i\theta})} \end{aligned}$$

Ora, per $x \sim 0$, $e^{ix\theta} - 1 = ix\theta + o(x)$, per ogni θ fissato, quindi per $n \rightarrow \infty$,

$$10^n(1 - e^{10^{-n}i\theta}) = -\frac{e^{10^{-n}i\theta} - 1}{10^{-n}} = -i\theta + o(10^{-n}),$$

da cui segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - 1}{i\theta}.$$

Infine, se $U \sim \text{Un}(0, 1)$ allora

$$\varphi_U(\theta) = \int_0^1 e^{i\theta u} du = \frac{e^{i\theta} - 1}{i\theta},$$

da cui segue che X_n converge in legge ad una v.a. $\text{Un}(0, 1)$.

Per dimostrare che X_n converge anche q.c., osserviamo che, per ogni ω , $X_n(\omega) = \sum_{k=1}^n Y_k(\omega) 10^{-k}$ e $Y_k(\omega) \geq 0$ per $\mathbb{P}$ -q.o. ω , quindi $X_n(\omega)$ cresce all'aumentare di n . Inoltre, $\mathbb{P}$ -q.o. ω ,

$$0 \leq X_n(\omega) = \sum_{k=1}^n Y_k(\omega) 10^{-k} \leq \sum_{k=1}^n 9 \cdot 10^{-k} \leq 9 \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} = 1,$$

quindi $\{X_n(\omega)\}_n$ è una successione monotona non decrescente e limitata, $\mathbb{P}$ -q.o. ω , quindi convergente. Ciò prova che esiste una v.a. Z tale che $X_n \rightarrow Z$ q.c. Inoltre, $X_n \rightarrow Z$ anche in legge, quindi per quanto già visto dev'essere $Z \sim \text{Un}(0, 1)$.

Esercizio 16. a) Essendo $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} AY + \mu$, dove $A \in \text{Mat}(d \times d)$ è simmetrica e tale che $A \cdot A = C$ e $Y \sim N(0, I_{d \times d})$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|^2) &= \mathbb{E}(X^t \cdot X) = \mathbb{E}((AY + \mu)^t (AY + \mu)) = \mathbb{E}((\mu^t + Y^t A^t)(AY + \mu)) \\ &= \mathbb{E}(\mu^t AY + \mu^t \mu + Y^t A^t AY + Y^t A^t \mu) \\ &= \mu^t A \mathbb{E}(Y) + \mu^t \mu + \mathbb{E}(Y^t CY) + \mathbb{E}(Y^t) A^t \mu\end{aligned}$$

Ricordando che $\mathbb{E}(Y) = 0$ e che $\mathbb{E}(Y^i Y^j) = \delta_{ij}$, otteniamo

$$\mathbb{E}(|X|^2) = \mu^t \mu + \mathbb{E}(Y^t CY) = \mu^t \mu + \sum_{i,j=1}^d \mathbb{E}(Y^i C_{ij} Y^j) = \mu^t \mu + \sum_{i=1}^d C_{ii} < \infty$$

quindi $X \in L_d^2$.

b1) Supponiamo che $X_n \rightarrow X$ in L_d^2 . Allora, $X_n \rightarrow X$ in L_d^1 . Ma, per ogni $i = 1, \dots, d$ si ha $|X_n^i - X^i| \leq |X_n - X|$ e quindi $X_n^i \rightarrow X^i$ in L^1 . Ma allora $\mu_n^i = \mathbb{E}(X_n^i) \rightarrow \mathbb{E}(X^i) = \mu$, da cui $\mu_n \rightarrow \mu$, con $\mu = \mathbb{E}(X)$. Poi, presi $i, j = 1, \dots, d$, usando la disuguaglianza di Cauchy Schwarz otteniamo

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(X_n^i X_n^j) - \mathbb{E}(X^i X^j)| &\leq \mathbb{E}(|X_n^i X_n^j - X^i X^j|) \\ &= \mathbb{E}(|X_n^i X_n^j - X_n^i X^j + X_n^i X^j - X^i X^j|) \\ &\leq \mathbb{E}(|X_n^i| |X_n^j - X^j|) + \mathbb{E}(|X_n^i - X^i| |X^j|) \\ &\leq \|X_n^i\|_{L^2} \|X_n^j - X^j\|_{L^2} + \|X_n^i - X^i\|_{L^2} \|X^j\|_{L^2}\end{aligned}$$

Ora, essendo per ogni $U \in L_d^2$, $\|U^i\|_{L^2} \leq \|U\|_{L_d^2}$, se $X_n \rightarrow X$ in L_d^2 evidentemente si ha $\|X_n^i\|_{L^2} \rightarrow \|X^i\|_{L^2}$ e $\|X_n^i - X^i\|_{L^2} \rightarrow 0$. Quindi,

$$|\mathbb{E}(X_n^i X_n^j) - \mathbb{E}(X^i X^j)| \leq \|X_n^i\|_{L^2} \|X_n^j - X^j\|_{L^2} + \|X_n^i - X^i\|_{L^2} \|X^j\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Ma allora,

$$\mu_n^i \mu_n^j + (C_n)_{ij} = \mathbb{E}(X_n^i X_n^j) \rightarrow \mathbb{E}(X^i X^j) = \Gamma_{ij}.$$

Poiché $\mu_n \rightarrow \mu$,

$$(C_n)_{ij} \rightarrow C_{ij} = \Gamma_{ij} - \mu^i \mu^j.$$

È immediato verificare che C è simmetrica e semidefinita positiva, dunque anche **b2)** è a posto.

b3) Poiché $X_n \rightarrow X$ in L_d^2 si ha $X_n \rightarrow X$ in legge. Quindi, passando alle funzioni caratteristiche,

$$\varphi_X(\vartheta) = \lim_n \varphi_{X_n}(\vartheta) = \lim_n e^{i\langle \mu_n, \vartheta \rangle - \frac{1}{2} \langle C_n \vartheta, \vartheta \rangle}.$$

Poiché $\mu_n \rightarrow \mu$ e $C_n \rightarrow C$,

$$\varphi_X(\vartheta) = e^{i\langle \mu, \vartheta \rangle - \frac{1}{2}\langle C\vartheta, \vartheta \rangle}$$

e dunque $X \sim N(\mu, C)$.

c) Sia $\{X_n\}_n$ una successione di $\mathcal{X}$ convergente in L_d^2 a X . Allora, abbiamo appena visto che $X \in \mathcal{X}$, dunque $\mathcal{X}$ è un chiuso in L_d^2 .

Esercizio 17. a) Detta $\hat{\nu}_n$ la f.c. di ν_n , si ha

$$\hat{\nu}_n(\vartheta) = e^{-\frac{1}{n}|\vartheta|^2} \rightarrow 1 = \hat{\delta}_{\{0\}}(\vartheta)$$

e la tesi segue dal teorema di continuità di Lévy.

b) Detta p_n la densità di una $N(0, \frac{1}{n}I_{d \times d})$, per $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ si ha,

$$\mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{A-z} \nu_n(dx) \right) \mu(dz) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{A-z} p_n(x) dx \right) \mu(dz)$$

Fissato $z \in \mathbb{R}^d$ e considerando la sostituzione $x = y - z$ nell'integrale interno, otteniamo

$$\int_{A-z} p_n(x) dx = \int_A p_n(y - z) dy.$$

Usando Fubini, si ha

$$\mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_A p_n(y - z) dy \right) \mu(dz) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}^d} p_n(y - z) \mu(dz) \right) dy$$

da cui si ottiene immediatamente che

$$\frac{d\mu_n}{d\text{Leb}_d}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} p_n(y - z) \mu(dz).$$

Per dimostrare che $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, possiamo usare 1) il teorema di continuità di Lévy oppure 2) la definizione di convergenza debole. Vediamoli entrambi.

1) Il punto è che (cfr. Esercitazione 8) $\widehat{\mu * \nu_n}(\vartheta) = \widehat{\mu}(\vartheta) \cdot \widehat{\nu_n}(\vartheta)$ e $\nu_n(\vartheta) = e^{-\frac{1}{n}|\vartheta|^2} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, quindi $\widehat{\mu * \nu_n}(\vartheta) \rightarrow \widehat{\mu}(\vartheta)$ e la tesi è dimostrata.

2) Per $h \in C_b$, $\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)| \mu * \nu_n(dx) < \infty$, quindi l'uso di Fubini che faremo a breve è giustificato. Si ha,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \mu * \nu_n(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \frac{\mu * \nu_n}{d\text{Leb}_d}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} p_n(x - z) \mu(dz) \right) dx \\ [\text{Fubini}] &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x) p_n(x - z) dx \right) \mu(dz) \end{aligned}$$

Ora, per ogni $z \in \mathbb{R}^d$ fissato, $p_n(x - z) dx = \nu_n^z(dx)$ dove $\nu_n^z \sim N(z, \frac{1}{n}I_{d \times d})$. È immediato verificare che $\nu_n^z \xrightarrow{w} \delta_{\{z\}}$, e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x) p_n(x - z) dx = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \nu_n^z(dx) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \delta_{\{z\}}(dx) = h(z)$$

perché $h \in C_b$. Inoltre,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} h(x) p_n(x - z) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |h(x)| \nu_n^z(dx) \leq \|h\|_{\infty}.$$

Allora, per convergenza dominata otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x) \mu * \nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x) p_n(x - z) dx \right) \mu(dz) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} h(z) \mu(dz)$$

da cui la tesi.

c) Il controesempio in **c1)** segue da **a)**: basta prendere $X_n \sim N(0, \frac{1}{n}I_{d \times d})$ e $X = 0$ q.c. Per **c2)**, fissata $X \sim \mu$, basta prendere $X_n \sim \mu * \nu_n$: $X_n \rightarrow X$ in legge e ciascuna X_n è assolutamente continua, indipendentemente dal fatto che X lo sia o no.