Esercitazione VIII
Complementi di Probabilità
a.a. 2011/2012

Argomenti: funzioni caratteristiche.

Esercizio 1. Sia X una v.a. a valori in $\mathbb{R}^d$ e sia φ la funzione caratteristica di X: $\varphi(\vartheta) = \mathbb{E}(e^{i\langle\vartheta,X\rangle})$, $\vartheta \in \mathbb{R}^d$.

a) Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $R > R_\varepsilon$ si ha $\mathbb{P}(|X| > R) < \varepsilon/4$.

b) Dimostrare che $|e^{i\langle\vartheta_1,x\rangle} - e^{i\langle\vartheta_2,x\rangle}| \le |x|\,|\vartheta_1 - \vartheta_2|$, per ogni $x, \vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}^d$.

c) Dimostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $R > 0$ e per ogni $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}|\varphi(\vartheta_1) - \varphi(\vartheta_2)| &\le C\Big(|\vartheta_1 - \vartheta_2|\,\mathbb{E}(|X|\mathbf{1}_{|X|\le R}) + \mathbb{P}(|X| > R)\Big)\\ &\le C\Big(|\vartheta_1 - \vartheta_2|R + \mathbb{P}(|X| > R)\Big).\end{aligned}$$

d) Dedurre che $\theta \mapsto \varphi(\vartheta)$ è uniformemente continua.

Esercizio 2. Sia X una v.a. con densità esponenziale-doppia, cioè $f_X(x) = \frac{1}{2}\,e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Detta φ_X la funzione caratteristica di X, verificare[1] che $\varphi_X(\theta) = \frac{1}{1+\theta^2}$.

b) Verificare che $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R}, \mathrm{Leb})$ e dedurre l'espressione di f_X usando il teorema di inversione.

c) Una v.a. Y è detta di Cauchy se ha densità $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $y \in \mathbb{R}$. Usando **a)** e **b)**, dimostrare che[2] $\varphi_Y(y) = e^{-|\theta|}$, $\theta \in \mathbb{R}$, essendo φ_Y la funzione caratteristica di Y.

[1] Potrebbe essere utile ricordare che se $Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ allora

$$\varphi_Z(\theta) = \int_0^\infty e^{x(i\theta-\lambda)}dx = \frac{1}{\lambda - i\theta}.$$

[2] Questo esercizio consente di determinare la funzione caratteristica di una v.a. di Cauchy sfruttando una proprietà di dualità tra le leggi esponenziale-doppia e di Cauchy. La funzione caratteristica di una v.a. di Cauchy si può anche calcolare con metodi di analisi complessa. A tale scopo, si consideri la funzione $f(z) = e^{i\theta z}/(1+z^2)$, $z \in \mathbb{C}$ (si noti che f ha due poli in $\pm i$). Si integri f lungo la curva (chiusa) $\mathscr{C}_R$ di $\mathbb{C}$ delineata dal segmento (sull'asse reale) che congiunge $-R$ a R e dalla semicirconferenza di raggio R centrata nell'origine, prendendo quella superiore se $\theta > 0$ e quella inferiore se $\theta < 0$. Si calcoli $\int_{\mathscr{C}_R} f(z)dz$ usando il Teorema dei Residui e se ne consideri poi il limite per $R \to +\infty$.

d) Sia $\{Y_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. di Cauchy. Dimostrare che[3] la media empirica $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k$ è ancora una v.a. di Cauchy. Questo risultato è in apparente contraddizione con la LGN: perché? E perché tale contraddizione è solo apparente?

Esercizio 3. Se $\varphi(t)$ denota una funzione caratteristica, dimostrare che anche $\bar{\varphi}(t)$, $\varphi^2(t)$, $|\varphi|^2(t)$ sono funzioni caratteristiche.

Esercizio 4. Sia $\varphi(t)$ la funzione caratteristica di una v.a. $X \in L^2$. Dimostrare che si ha sempre $\varphi'(0)^2 \geq \varphi''(0)$.

Esercizio 5. Sia $X = (X_1, \ldots, X_d)$ una v.a. su $\mathbb{R}^d$ di legge $\mathrm{N}(\mu, C)$, con $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \mathrm{Mat}(d \times d)$ simmetrica e semidefinita positiva. Dunque, $\varphi_X(\theta) = e^{i\langle\theta,\mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\theta,\theta\rangle}$, $\theta \in \mathbb{R}^d$.

a) Dimostrare che ciascuna componente X_k del vettore X ha legge gaussiana su $\mathbb{R}$, di media e varianza da precisare.

b) Dimostrare che se C è una matrice diagonale allora le coordinate $X_1, \ldots, X_d$ sono v.a. indipendenti.

c) Dimostrare il risultato più generale.

Supponiamo che C sia una matrice a blocchi del tipo

$$C = \begin{pmatrix} \bar{C} & O \\ O^* & \hat{C} \end{pmatrix}$$

con $\bar{C} \in \mathrm{Mat}(k \times k)$, $\hat{C} \in \mathrm{Mat}((d-k) \times (d-k))$, $O \in \mathrm{Mat}(k \times (d-k))$, dove $1 \leq k < d$ e O è una matrice nulla. Provare che i sottovettori aleatori $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ e $\hat{X} = (X_{k+1}, \ldots, X_d)$ sono indipendenti e gaussiani rispettivamente su $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{d-k}$.

Esercizio 6. Siano X e Z due v.a. reali indipendenti tali che $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ e $\mathbb{P}(Z = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(Z = -1)$. Definiamo $Y = ZX$.

a) Scrivere la funzione caratteristica di Y e dedurre che $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$.

b) Scrivere la funzione caratteristica di (X, Y) e dedurre che X e Y non sono indipendenti.

c) Verificare che $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

d) È possibile che la coppia (X, Y) abbia legge gaussiana su $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 7. Sia $Z = (Z_1, \ldots, Z_d)$ una v.a. su $\mathbb{R}^d$ di legge $\mathrm{N}(\mu, C)$, con $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \mathrm{Mat}(d \times d)$ simmetrica e semidefinita positiva.

[3] Potrebbe essere utile ricordare che esiste una corrispondenza biunivoca tra leggi e funzioni caratteristiche.

a) Per $m \in \mathbb{R}^k$ e $A \in \mathrm{Mat}(k \times d)$, sia $W = m + AZ$. Dimostrare che W è ancora gaussiana e precisare i parametri che caratterizzano la legge. Dedurre poi che per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, la v.a. $\lambda_1 Z_1 + \cdots + \lambda_d Z_d$ è gaussiana, di parametri da determinare.

b) Siano X e Y due v.a. su $\mathbb{R}$ congiuntamente gaussiane, centrate e tali che $\mathbb{E}(X^2) = 4$, $\mathbb{E}(Y^2) = 1$ e $2X + Y \perp\!\!\!\perp X - 3Y$.

b1) Scrivere la matrice di covarianza di (X, Y).

b2) Calcolare la legge di $(X + Y, 2X - Y)$.

Esercizio 8. Per $\mu, \nu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R}^d)$, dimostrare che[4] $\widehat{\mu * \nu}(\vartheta) = \widehat{\mu}(\vartheta) \cdot \widehat{\nu}(\vartheta)$, dove per $\lambda \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{\lambda}$ denota la funzione caratteristica di λ.

Esercizio 9. Su $(\Omega, \mathscr{F})$, sia $Z = (Z_1, Z_2)$ una v.a. gaussiana standard su $\mathbb{R}^2$. Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $\mathbb{P}_\alpha$ la misura definita da

$$\frac{d\mathbb{P}_\alpha}{d\mathbb{P}} = \exp\Big(\alpha Z_1 - \frac{\alpha^2}{2}\Big).$$

a) Verificare che[5] $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\alpha)$ è uno spazio di probabilità, per ogni α.

b) Dimostrare che sotto $\mathbb{P}_\alpha$ le v.a. $Z_1 - \alpha$ e Z_2 sono i.i.d. di legge $\mathrm{N}(0, 1)$.

Esercizio 10. Sia X una v.a. su $\mathbb{R}$, di legge μ e funzione caratteristica φ.

a) Supponiamo che $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$.

a1) Verificare che $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) + \varphi(-t) - 2\varphi(0)}{t^2} = \varphi''(0)$.

a2) Dimostrare che $\displaystyle\frac{\varphi(t) + \varphi(-t) - 2\varphi(0)}{t^2} = -\mathbb{E}\Big(\frac{2(1 - \cos(tX))}{t^2}\Big)$.

a3) Verificare che $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{2(1 - \cos(tX))}{t^2} = X^2$ q.c.

a4) Dedurre che $\displaystyle\varphi''(0) = -\lim_{t \to 0} \mathbb{E}\Big(\frac{2(1 - \cos(tX))}{t^2}\Big) = -\mathbb{E}(X^2)$ e che quindi $X \in L^2$, con $\mathbb{E}(X^2) = -\varphi''(0)$.
[Sugg.: osservare che $1 - \cos(tx) \geq 0$ ed usare il lemma di Fatou.]

---

[4] Ricordiamo che $\mu * \nu$ denota il prodotto di convoluzione tra μ e ν: per $A \in \mathbb{R}^d$, $\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathbf{1}_A(x + y)\mu(dx)\nu(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(A - z)\, \nu(dz) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu(A - z)\, \mu(dz)$, dove, per $z \in \mathbb{R}^d$, $A - z = \{x \in \mathbb{R}^d : x = y - z,\ y \in A\}$ è l'insieme che si ottiene traslando A con z. Si ricorda inoltre che, dette X e Y due v.a. indipendenti con legge μ e ν rispettivamente, allora $\mu * \nu$ è la legge di $X + Y$.

[5] Ricordiamo che se $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ allora $\mathbb{E}(e^{uX}) = e^{u^2/2}$, per ogni $u \in \mathbb{C}$.

b) Generalizzare quanto visto in **a)** al caso di $\varphi \in C^{2k}(\mathbb{R})$, con $k \geq 1$ qualsiasi, dimostrando la validità della seguente affermazione: *se* $\varphi \in C^{2k}(\mathbb{R})$, $k \geq 1$, *allora* $X \in L^{2k}(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *ed inoltre* $\varphi^{(2k)}(0) = (-1)^k \mathbb{E}(X^{2k})$.

[Sugg.: procedere per induzione ed usare la stessa tecnica sviluppata in **a)**.]

Esercizio 11. Dimostare che se X è una v.a. su $\mathbb{R}$ t.c. $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ allora $X \in L^p$ per ogni $p \geq 1$. Dimostrare più in generale che se X è a valori in $\mathbb{R}^d$ e $X \sim \mathrm{N}(\mu, C)$ allora $X \in L^p$ (cioè: $|X|^p \in L^1$) per ogni $p \geq 1$.

Soluzioni

Esercizio 1. a) Poiché $\{|X| > R\} \uparrow \{|X| = \infty\}$ per $R \uparrow \infty$, si ha $\mathbb{P}(|X| > R) \uparrow 0$ quando $R \uparrow \infty$, da cui la tesi.

b) Fissato $x \in \mathbb{R}^d$, la funzione $\vartheta \mapsto e^{i\langle\vartheta,x\rangle}$ è differenziabile e $\partial_{\vartheta_k} e^{i\langle\vartheta,x\rangle} = ix_k e^{i\langle\vartheta,x\rangle}$. Dunque, $\|\nabla e^{i\langle\vartheta,x\rangle}\|_\infty \leq \sup_k |x_k| \leq |x|$. Allora, $\vartheta \mapsto e^{i\langle\vartheta,x\rangle}$ è Lipschitziana con costante di Lipschitz pari a $|x|$, da cui la tesi.
Oppure, fissato $x \in \mathbb{R}^d$ e posto $\psi(\vartheta) = e^{i\langle\theta,x\rangle}$, si ha:

$$\begin{aligned}\psi(\vartheta_1) - \psi(\vartheta_2) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi\big(\vartheta_1 + t(\vartheta_2 - \vartheta_1)\big)dt \\ &= \int_0^1 \langle\nabla\psi\big(\vartheta_1 + t(\vartheta_2 - \vartheta_1)\big), \vartheta_1 - \vartheta_2\rangle dt.\end{aligned}$$

Passando ai moduli ed osservando che $\nabla\psi(\vartheta) = ix\psi(\theta)$,

$$\begin{aligned}|\psi(\vartheta_1) - \psi(\vartheta_2)| &\leq \int_0^1 |i\psi\big(\vartheta_1 + t(\vartheta_2 - \vartheta_1)\big)\langle x, \vartheta_1 - \vartheta_2\rangle| dt \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{|\psi\big(\vartheta_1 + t(\vartheta_2 - \vartheta_1)\big)|}_{\leq 1} \cdot |x| \cdot |\vartheta_1 - \vartheta_2| dt \\ &\leq |x||\vartheta_1 - \vartheta_2|\end{aligned}$$

c) Per $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}^d$ e per $R > 0$, si ha

$$\begin{aligned}|\varphi(\vartheta_1) - \varphi(\vartheta_2)| &\leq \mathbb{E}\Big(|e^{i\langle\vartheta_1,X\rangle} - e^{i\langle\vartheta_2,X\rangle}|\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(|e^{i\langle\vartheta_1,X\rangle} - e^{i\langle\vartheta_2,X\rangle}|\mathbf{1}_{|X|\leq R}\Big) + \mathbb{E}\Big(|e^{i\langle\vartheta_1,X\rangle} - e^{i\langle\vartheta_2,X\rangle}|\mathbf{1}_{|X|>R}\Big) \\ &\leq \mathbb{E}\Big(|X| \cdot |\vartheta_1 - \vartheta_2|\, \mathbf{1}_{|X|\leq R}\Big) + \mathbb{E}(2\mathbf{1}_{|X|>R}) \\ &\leq R \cdot |\vartheta_1 - \vartheta_2| + 2\mathbb{P}(|X| > R) \\ &\leq 2\Big(R \cdot |\vartheta_1 - \vartheta_2| + \mathbb{P}(|X| > R)\Big)\end{aligned}$$

d) Preso $\varepsilon > 0$, da **a)** possiamo scegliere R_ε tale che $\mathbb{P}(|X| > R_\varepsilon) < \varepsilon/4$. Allora, scelto $\delta = \delta_\varepsilon < \varepsilon/(4R_\varepsilon)$, da **c)** si ha che se $|\vartheta_1 - \vartheta_2| < \delta$ allora $|\varphi(\vartheta_1) - \varphi(\vartheta_2)| < \varepsilon$. Dunque, φ è uniformemente continua.

Esercizio 2 a) Si ha

$$\begin{aligned}\varphi_X(\theta) &= \frac{1}{2}\int e^{i\theta x}\, e^{-|x|}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{i\theta x}\, e^{-x}\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^{i\theta x}\, e^{x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{x(i\theta-1)}\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{x(-i\theta-1)}\, dx\end{aligned}$$

dove nell'ultimo integrale si è effettuato il cambio di variabile $x \mapsto -x$. Se $Z \sim \mathrm{Exp}(1)$, allora $\varphi_Z(\theta) = \int_0^{+\infty} e^{x(i\theta-1)}\,dx = \frac{1}{1-i\theta}$, quindi

$$\varphi_X(\theta) = \frac{1}{2}\,\varphi_Z(\theta) + \frac{1}{2}\,\varphi_Z(-\theta) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-i\theta} + \frac{1}{1+i\theta}\Big) = \frac{1}{1+\theta^2}.$$

b) Si verifica facilmente che $\varphi_X(\theta)$ è integrabile su $\mathbb{R}$ e che

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(\theta)\,d\theta = \lim_{N\to+\infty} \arctan\theta\Big|_{-N}^{N} = \pi$$

(si consideri ad esempio la successione $f_N(\theta) = \varphi_X(\theta)\,\mathbf{1}_{\theta\in(-N,N)}$ e si usi MON). Allora (teorema di inversione) X ha densità data da

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta x}\,\varphi_X(\theta)\,d\theta.$$

cioè

$$\frac{1}{2}\,e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\theta x}}{1+\theta^2}\,d\theta,$$

il che prova che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\theta x}}{\pi(1+\theta^2)}\,d\theta = e^{-|x|}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

c) Se Y è una v.a. di Cauchy, allora

$$\varphi_Y(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta Y}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\theta x}}{\pi(1+x^2)}\,dx.$$

Ora, scambiando i ruoli a θ e x nella formula (1), si ottiene

$$\varphi_Y(\theta) = e^{-|\theta|}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

c) Posto $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, usando le proprietà della funzione caratteristica (ricordiamo che le Y_k sono indipendenti), si ha

$$\begin{aligned}\varphi_{\bar{Y}_n}(\theta) = \varphi_{\frac{1}{n}S_n}(\theta) = \varphi_{S_n}\Big(\frac{\theta}{n}\Big) &= \prod_{k=1}^n \varphi_{Y_k}\Big(\frac{\theta}{n}\Big)\\ &= \prod_{k=1}^n e^{-|\theta/n|} = e^{-n|\theta|/n} = e^{-|\theta|},\end{aligned}$$

quindi $\bar{Y}_n$ è ancora una v.a. di Cauchy. Ma allora $\bar{Y}_n \equiv \frac{1}{n}S_n$ non converge ad una costante, come seguirebbe dalla LGN. E infatti, qui la LGN non vale e non c'è alcuna contraddizione perché qui cade la condizione che assicura

la validità della LGN: una v.a. di Cauchy non ha media, come segue dal fatto che la funzione $x \mapsto x/(1+x^2) \notin L^1(\mathbb{R}, \mathrm{Leb})$.

Esercizio 3 Sia X una v.a. con f.c. φ: $\varphi = \varphi_X$. Allora

$$\bar{\varphi}(t) = \overline{\mathbb{E}(e^{itX})} = \mathbb{E}(\overline{e^{itX}}) = \mathbb{E}(e^{-itX}) = \varphi_{-X}(t)$$

quindi $\bar{\varphi}$ è una f.c. Poi, scelte Y, Z due v.a. indipendenti con la stessa legge di X, si ha

$$\varphi^2(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \cdot \varphi_Z(t) = \phi_{Y+Z}(t),$$

e ancora $\varphi^2(t)$ è una f.c. Infine, se Y, Z denotano ora due v.a. indipendenti tali che Y ha la stessa legge di X e Z si distribuisce come $-X$, si ha

$$|\varphi|^2(t) = \varphi(t) \cdot \bar{\varphi}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_{-X}(t) = \varphi_Y(t) \cdot \varphi_Z(t) = \phi_{Y+Z}(t),$$

dunque $|\varphi|^2(t)$ è una f.c.

Esercizio 4 Poiché $X \in L^2$, si ha

$$\varphi'(0) = \mathbb{E}(i\,X) \qquad \varphi''(0) = \mathbb{E}((iX)^2).$$

Poiché $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2$, sostituendo si ha $-\varphi''(0) \geq -\varphi'(0)^2$, da cui la tesi.

Esercizio 5. a) Sia $e_1, \ldots, e_d$ la base canonica su $\mathbb{R}^d$ e per $k = 1, \ldots, d$, sia $\theta_k = te_k$, $t \in \mathbb{R}$. Poiché $\langle \theta_k, X \rangle = tX_k$, otteniamo facilmente che $\varphi_{X_k}(t) = \varphi_X(\theta_k)$. Essendo $\langle \theta_k, \mu \rangle = t\mu_k$ e $\langle C\theta_k, \theta_k \rangle = C_{kk} \geq 0$, si ha

$$\varphi_{X_k}(t) = e^{it\mu_k - \frac{1}{2} C_{kk} t^2},$$

e quindi $X_k \sim \mathrm{N}(\mu_k, C_{kk})$.

b) Ricordando che $C_{k,\ell} = \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)$, otteniamo che C è una matrice diagonale, quindi $\langle C\theta, \theta \rangle = \sum_{k=1}^d C_{kk}\theta_k^2$. Ma allora

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_d}(\theta_1, \ldots, \theta_d) = e^{\sum_{k=1}^d (i\theta_k\mu_k - \frac{1}{2} C_{kk}\theta_k^2)} = \varphi_{X_1}(\theta_1) \cdots \varphi_{X_d}(\theta_d),$$

il che prova che $X_1, \ldots, X_d$ sono indipendenti.

c) Poniamo $X = (\bar{X}, \hat{X})$ e per $\theta \in \mathbb{R}^d$, usiamo la notazione $\theta = (\bar{\theta}, \hat{\theta})$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k$ e $\hat{\theta} = (\theta_{k+1}, \ldots, \theta_d) \in \mathbb{R}^{d-k}$. Osserviamo che si ha

$$\langle \mu, \theta \rangle = \langle \bar{\mu}, \bar{\theta} \rangle + \langle \hat{\mu}, \hat{\theta} \rangle \quad \text{e} \quad \langle C\theta, \theta \rangle = \langle \bar{C}\bar{\theta}, \bar{\theta} \rangle + \langle \hat{C}\hat{\theta}, \hat{\theta} \rangle$$

dove ovviamente si è posto $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k$ e $\hat{\mu} = (\mu_{k+1}, \ldots, \mu_d) \in \mathbb{R}^{d-k}$. Poiché

$$\varphi_X(\theta) = \varphi_{\bar{X},\hat{X}}(\bar{\theta}, \hat{\theta}),$$

si ha:

$$\varphi_{\bar{X}}(\bar{\theta}) = \varphi_{\bar{X},\hat{X}}(\bar{\theta}, 0) = e^{i\langle\bar{\mu},\bar{\theta}\rangle - \frac{1}{2}\langle\bar{C}\bar{\theta},\bar{\theta}\rangle}$$
$$\varphi_{\hat{X}}(\hat{\theta}) = \varphi_{\bar{X},\hat{X}}(0, \hat{\theta}) = e^{i\langle\hat{\mu},\hat{\theta}\rangle - \frac{1}{2}\langle\hat{C}\hat{\theta},\hat{\theta}\rangle}$$

e dunque $\bar{X} \sim \mathrm{N}(\bar{\mu}, \bar{C})$, $\hat{X} \sim \mathrm{N}(\hat{\mu}, \hat{C})$. Di conseguenza,

$$\varphi_X(\theta) = \varphi_{\bar{X},\hat{X}}(\bar{\theta}, \hat{\theta}) = \varphi_{\bar{X}}(\bar{\theta})\varphi_{\hat{X}}(\hat{\theta}),$$

quindi $\bar{X} \perp\!\!\!\perp \hat{X}$.

Osservazione. Ricordiamo che se due v.a. sono indipendenti allora hanno (matrice di) covarianza nulla. Viceversa, in generale (matrice di) covarianza nulla <u>non</u> implica indipendenza. Ma questo esercizio prova che nel caso gaussiano questa controparte c'è se la legge congiunta è gaussiana. Possiamo infatti enunciare questo risultato come segue: *due v.a. congiuntamente gaussiane e con (matrice di) covarianza nulla sono anche indipendenti.*

Esercizio 6. **a)** Per $t \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{itY}) = \mathbb{E}(e^{itXZ}) = \mathbb{E}(e^{itXZ}\mathbf{1}_{Z=1}) + \mathbb{E}(e^{itXZ}\mathbf{1}_{Z=-1}) \\ &= \mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{P}(Z=1) + \mathbb{E}(e^{-itX})\mathbb{P}(Z=-1) = \frac{1}{2}\,\varphi_X(t) + \frac{1}{2}\varphi_X(-t) \\ &= e^{-t^2/2}\end{aligned}$$

e quindi $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$.

b) Per $\theta \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\begin{aligned}\varphi_{XY}(\theta) &= \mathbb{E}(e^{i\theta_1 X + i\theta_1 Y}) = \mathbb{E}(e^{i\theta_1 X + i\theta_1 XZ}) \\ &= \mathbb{E}(e^{i\theta_1 X + i\theta_1 XZ}\mathbf{1}_{Z=1}) + \mathbb{E}(e^{i\theta_1 X + i\theta_1 XZ}\mathbf{1}_{Z=-1}) \\ &= \mathbb{E}(e^{i(\theta_1+\theta_2)X})\mathbb{P}(Z=1) + \mathbb{E}(e^{-i(\theta_1-\theta_2)X})\mathbb{P}(Z=-1) \\ &= \frac{1}{2}\,\varphi_X(\theta_1+\theta_2) + \frac{1}{2}\varphi_X(\theta_1-\theta_2) \\ &= \frac{1}{2}\big(e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)^2} + e^{-\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)^2}\big).\end{aligned}$$

In particolare, $\varphi_{XY}(\theta)$ non è data da $\varphi_X(\theta_1)\cdot\varphi_Y(\theta_2)$, quindi X e Y non sono indipendenti.

c) Poiché X e Y sono centrate, si ha

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2Z) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Z) = 0.$$

c) No, non è possibile: se infatti fossero congiuntamente gaussiane, avendo covarianza nulla per l'esercizio 5 sarebbero anche indipendenti.

Esercizio 7. a) Per $\theta \in \mathbb{R}^k$, si ha

$$\varphi_W(\theta) = \varphi_{m+AZ}(\theta) = e^{i\langle m,\theta\rangle}\varphi_Z(A^*\theta) = e^{i\langle m,\theta\rangle + i\langle \mu, A^*\theta\rangle - \frac{1}{2}\langle CA^*\theta, A^*\theta\rangle}.$$

Ma $\langle \mu, A^*\theta\rangle = \langle A\mu, \theta\rangle$ e $\langle CA^*\theta, A^*\theta\rangle = \langle ACA^*\theta, \theta\rangle$, quindi

$$\varphi_W(\theta) = \varphi_{m+AZ}(\theta) = e^{i\langle m+A\mu,\theta\rangle - \frac{1}{2}\langle ACA^*\theta,\theta\rangle},$$

da cui segue che $W \sim \mathrm{N}(m + A\mu, ACA^*)$. Infine, per $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\lambda_1 Z_1 + \cdots + \lambda_d Z_d = AZ, \quad \text{con } A = \lambda^*,$$

quindi $\lambda_1 Z_1 + \cdots + \lambda_d Z_d$ è una v.a. gaussiana su $\mathbb{R}$, di media $A\mu = \langle \lambda, \mu\rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i \mu_i$ e varianza $ACA^* = \langle C\lambda, \lambda\rangle = \sum_{i,j=1}^d C_{ij}\lambda_i\lambda_j$.
b1) Detta C_{XY} la matrice di covarianza di (X, Y), sappiamo che

$$C_{XY} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) \end{pmatrix}.$$

Qui, essendo $\mathbb{E}(X) = 0 = \mathbb{E}(Y)$, si ha $\mathrm{Var}(X) = 4$ e $\mathrm{Var}(Y) = 1$. L'ipotesi $2X + Y \perp\!\!\!\perp X - 3Y$ dà $0 = \mathrm{Cov}(2X+Y, X-3Y) = 2\mathrm{Var}(X) - 6\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Y) - 3\mathrm{Var}(Y) = 5 - 5\mathrm{Cov}(X,Y)$, da cui $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1$. Ma allora,

$$C_{XY} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b2) La coppia $(X + Y, 2X - Y)$ è una trasformazione lineare di (X, Y), quindi per il punto **a)** ha legge gaussiana. Essendo

$$\begin{pmatrix} X+Y \\ 2X-Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

usando **a)** otteniamo immediatamente che la legge è $\mathrm{N}(0, \Gamma)$, con

$$\Gamma = AC_{XY}A^* = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Dette X e Y due v.a. indipendenti con $X \sim \mu$ e $Y \sim \nu$, si ha

$$\begin{aligned} \widehat{\mu} * \nu(\vartheta) &= \mathbb{E}(e^{i\langle \theta, X+Y\rangle}) = \mathbb{E}(\underbrace{e^{i\langle\theta,X\rangle} \cdot e^{i\langle\theta,Y\rangle}}_{e^{i\langle\theta,X\rangle} \perp\!\!\!\perp e^{i\langle\theta,Y\rangle}}) \\ &= \mathbb{E}(e^{i\langle\theta,X\rangle})\mathbb{E}(e^{i\langle\theta,Y\rangle}) = \widehat{\mu}(\vartheta) \cdot \widehat{\nu}(\vartheta). \end{aligned}$$

Esercizio 9. a) $\mathbb{P}_\alpha$ è una misura e

$$\mathbb{P}_\alpha(\Omega) = \mathbb{E}(e^{\alpha Z_1 - \alpha^2/2}) = e^{\alpha^2/2 - \alpha^2/2} = 1$$

perché $Z_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$, da cui $\mathbb{P}_\alpha$ è una misura di probabilità.

b) Calcoliamo la funzione caratteristica congiunta di $Z_1 - \alpha$ e Z_2 sotto $\mathbb{P}_\alpha$:

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(u_1,u_2) &= \mathbb{E}_\alpha(e^{iu_1(Z_1-\alpha)+iu_2Z_2}) = \mathbb{E}(e^{\alpha Z_1-\alpha^2/2}\cdot e^{iu_1(Z_1-\alpha)+iu_2Z_2})\\
&= e^{-\alpha^2/2-iu_1\alpha}\mathbb{E}(e^{(\alpha+iu_1)Z_1})\mathbb{E}(e^{iu_2Z_2})\\
&= e^{-\alpha^2/2-iu_1\alpha}e^{(\alpha+iu_1)^2/2}e^{-u^2/2} = e^{-u_1^2/2}\cdot e^{-u_1^2/2}\\
&= \varphi_{\mathrm{N}(0,1)}(u_1)\varphi_{\mathrm{N}(0,1)}(u_2)
\end{aligned}$$

il che dà la tesi.

Esercizio 10. a1) Basta usare ad esempio lo sviluppo di Taylor: se $\varphi \in C^2$ allora

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + o(t^2),\\
\varphi(-t) &= \varphi(0) - \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + o(t^2).
\end{aligned}$$

Sommando si ottiene $\varphi(t)+\varphi(-t) = 2\varphi(0)+\varphi''(0)t^2+o(t^2)$ e quindi

$$\varphi''(0) = \frac{\varphi(t)+\varphi(-t)-2\varphi(0)}{t^2} + \frac{o(t^2)}{t^2}$$

da cui la tesi.

a2) Si ha

$$\frac{\varphi(t)+\varphi(-t)-2\varphi(0)}{t^2} = \frac{1}{t^2}\,\mathbb{E}(e^{itX}+e^{-itX}-2) = \frac{1}{t^2}\,\mathbb{E}(2\cos(tX)-2).$$

a3) È ben noto.

a4) Essendo $1-\cos(tX) \geq 0$, per il Lemma di Fatou si ha

$$\liminf_{t\to 0}\mathbb{E}\Big(\frac{2(1-\cos(tX))}{t^2}\Big) = \mathbb{E}\Big(\liminf_{t\to 0}\frac{2(1-\cos(tX))}{t^2}\Big) = \mathbb{E}(X^2).$$

Ma

$$\liminf_{t\to 0}\mathbb{E}\Big(\frac{2(1-\cos(tX))}{t^2}\Big) = -\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)+\varphi(-t)-2\varphi(0)}{t^2} = -\varphi''(0),$$

da cui si ottiene che $X \in L^2$ e che $\varphi''(0) = -\mathbb{E}(X^2)$.

b) Procediamo per induzione. Per $k=1$ l'affermazione è stata dimostrata in **a)**. Supponiamo che sia vera per $k>1$ e dimostriamone la validità per $k+1$.

Si ha

$$\varphi^{(2k+2)}(0) = \frac{\varphi^{(2k)}(t)+\varphi(2k)(-t)-2\varphi(2k)(0)}{t^2} + \frac{o(t^2)}{t^2}.$$

Per ipotesi induttiva, abbiamo $X \in L^{2k-2}$ e dunque sappiamo (vedi lezioni) che $\varphi^{(2k-2)}(t) = \mathbb{E}((iX)^{2k-2}e^{itX})$. Allora,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{(2k)}(t) + \varphi^{(2k)}(-t) - 2\varphi^{(2k)}(0)}{t^2} &= \frac{1}{t^2}\,\mathbb{E}\big((iX)^{2k-2}(e^{itX} + e^{-itX} - 2)\big) \\ &= (-1)^k\,\mathbb{E}\Big(2X^{2k-2}\,\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\Big).\end{aligned}$$

Essendo $2X^{2k-2}\,\frac{1-\cos(tX)}{t^2} \geq 0$ e $2X^{2k-2}\,\frac{(1-\cos(tX))}{t^2} \to X^{2k}$ per $t \to 0$, per il Lemma di Fatou si ha

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to 0}\,\mathbb{E}\Big(2X^{2k-2}\,\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\Big) &= \mathbb{E}\Big(\liminf_{t\to 0}\,2X^{2k-2}\,\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\Big) \\ &= \mathbb{E}(X^{2k}),\end{aligned}$$

da cui si ottiene che $X \in L^{2k}$ e che $\varphi^{(2k)}(0) = (-1)^k\mathbb{E}(X^{2k})$.

Esercizio 11. Essendo $\varphi_X(t) = e^{it\mu - t^2/2} \in C^\infty$, per l'esercizio 10 si ha $X \in L^{2k}$ per ogni $k \geq 1$ e quindi $X \in L^p$ per ogni p. Se X è a valori in $\mathbb{R}^d$, sappiamo che ciascuna coordinata è una v.a. gaussiana su $\mathbb{R}$ (cfr esercizio 5). Ora, preso $q \geq 1$, si ha

$$|X|^{2q} = (X_1^2 + \cdots + X_d^2)^q \leq C_q(|X_1|^{2q} + \cdots + |X_d|^{2q}),$$

dove $C_q > 0$ è una costante opportuna. Poiché $|X_i|^{2q} \in L^1$ per ogni $i = 1, \ldots, d$, si ha $|X| \in L^{2q}$ per ogni q, e quindi $|X| \in L^p$ per ogni $p \geq 1$.